物 理 學 報
第 12 卷 第 2 期 1956 年 3 月

β-中微子角關聯, β-γ 角關聯和 β-能譜因子*

鄧稼先 何祚庥
(中國科學院物理研究所)

提 要

在這篇文章中，我們利用了不可約張量算符可以表示爲立體球諧函數的特性，利用了威格勒 (E. P. Wigner) - 拉卡 (G. Racah) 的代數規則以及轉動羣的表象的某些特性；我們求出了任意次禁戒躍遷的 β- 中微子角關聯和 β-γ 角關聯的公式．在這個計算裏面，我們還計算了原子核的庫倫場對於它所放出的 β-粒子的影響以及五種相互作用的混合型．

在第二節中，我們首先把 β - 衰變理論中常用的五種相互作用所包含的 16 個狄喇克 (Dirac) 的 4×4 的矩陣各寫成 2×2 矩陣的直接乘積，並且利用了這些矩陣的轉換性質用一個公式把代表着五種不同相互作用的矩陣表示出來．在本節中，我們給出電子、中微子波函數的展開式．在第三節中，我們用和時間相關的微擾理論計算了在庫倫場影響下發生 β-衰變的幾率，證明電子的波函數雖然含有外射波和內射波，但躍遷幾率却僅由外射波所引起．在第四節中，我們利用轉動羣的表象，利用直角坐標中不可約張量算符可以寫成立體球諧函數這一性質，而求出了五種相互作用混合時任何次禁戒躍遷的 β - 中微子角關聯的公式．在第五節中，我們把上述 β-中微子角關聯的公式對於電子和中微子的立體角積分之後，我們便求出跟葛魯林 (E. Greuling) 和伯塞 (D. L. Pursey) 的結果一樣的 β-能譜因子的公式．在第六節中，我們將中微子運動方向、自旋方向平均起來，並且利用林 (D. S. Ling, Jr) 和法爾柯夫 (D. L. Falkoff) 所求出的電 2^L 極和磁 2^{L-1} 極輻射混合 γ 射線角分佈的公式，求出 β-衰變中 β-γ 角關聯的普遍公式．最後在附錄中給出必要的數學公式．

一. 引 言

我們知道，在 β-衰變的理論中，通常有五種相互作用引起 β-衰變．這五種相互作用分別是標量、矢量、張量、贋矢量、贋標量(簡寫爲 S, V, T, A, P)．歷年來人們分析各個原子核放射出 β-射線的能譜，想決定到底是哪幾種相互作用引起衰變．最近[1]從分析屬於第一次禁戒躍遷的能譜以及 RaE 的能譜得知 S 和 T 混合起來可以解釋 β-衰變的能譜．我們知道，β-中微子角關聯對於決定相互作用的類型是很靈敏的．所

* 1955 年 9 月 16 日收到.

可惜的是中微子很難測量．因之 β-中微子的角關聯也很難測量．近來在分析[2] β-粒子和反衝原子核 He^6 的角關聯中證明相互作用須有 T 才能解釋實驗結果，在分析[3] β-粒子和反衝原子核 Ne^{19} 的角關聯中證明需要相互作用 S 和 T 混合起來．策爾多維奇[4] 也曾指出，欲知在費密 (E. Fermi) 相互作用中到底是 S 還是 V，最好再測量一下 N^{13} 和 O^{15} 的 β-中微子角關聯．因此可知 β-中微子角關聯對於決定相互作用的類型是有很大作用的．β-γ 角關聯對於確定衰變圖譜是有幫助的，亦即可定原子核基態和受激態的自旋和宇稱，另外也可幫助確定 β-衰變的相互作用．法爾柯夫和宇倫貝克[5] 曾指出禁戒躍遷的 β-能譜如果是容許形狀，那就沒有 β-γ 角關聯．現在我們知道並不盡然．例如原子核 Tm^{170} 的衰變，$Tm^{170} \rightarrow Yb^{170*}$ 的 β-能譜是容許形狀[6]，但也有 β-γ 角關聯：

$$W(\theta) = 1 + a\cos^2\theta,$$

式中 $a = -0.19 \pm 0.04$．後來雅瑪塔等人[7] 分析的結果證明 S 和 T 混合既可以解釋 β-能譜，又可以解釋 β-γ 角關聯．從分析[8] Sb^{124} 的能譜，以及 β-γ 角關聯的結果也證明相互作用 S 和 T 需要混合起來．

在 β-衰變的理論中，康諾賓斯基和宇倫貝克，葛魯林，伯塞[9] 等人先後計算了相互作用不混合時和相互作用混合禁戒躍遷的 β-能譜因子．他們的最後結果都表示成直角坐標中不可約張量算符的標積之和．在他們之後斯必爾斯和柏林斯托爾[10] 利用不可約張量算符可以寫成立體諧函數這一性質以及威格勒-拉卡的代數規則來計算相互作用不混合時任何次禁戒躍遷的能譜因子．最近巴納爾基和撒哈[11] 按照斯必爾斯和柏林斯托爾的方法計算相互作用混合時任何次禁戒躍遷的能譜因子．

關於 β-中微子的角關聯，葛魯林和密克斯和莫瑞塔[12] 分別計算了在相互作用不混合時和相互作用混合時容許躍遷和第一次禁戒躍遷β-中微子角關聯．在他們計算中考慮到原子核的庫倫場對所放出 β-粒子的影響，因之他們所得到的角關聯公式是與原子核電荷 z 相關的．在 β-γ 角關聯方面，雅瑪塔和莫瑞塔[13]繼法爾柯夫和宇倫貝克[5] 之後，也計算過相互作用混合時第一、二次禁戒躍遷與 z 相關的 β-粒子角分佈的公式，從而求出 β-γ 角關聯．最近胡策西維里[14] 曾先後計算了由有固定方位的原子核所放出的 β-粒子的角分佈，他僅考慮到相互作用是張量或是贋矢量，並且只是 $\Delta I = 2$，宇稱改變時的情形．

在這篇文章中我們應用斯必爾斯和柏林斯托爾的方法，並考慮到原子核的庫倫場對於所放射出 β-粒子的影響，求出相互作用混合時任何次禁戒躍遷的 β-中微子角關聯的公式，以及 β-粒子角分佈的公式，從而可求出 β-γ 角關聯．

在第二節中我們首先寫出通常在 β–衰變理論中所用的五種相互作用．然後把五種相互作用所包含的 16 個狄喇克的 4×4 矩陣各寫成兩個 2×2 矩陣的直接乘積．當坐標軸經過三維空間轉動，空間反射，或是總反射（卽對空間坐標和時間坐標都經過反射）時，這 16 個矩陣的變換性質各不相同．若用三個參數 ξ_K, η_K, ζ_K 表示它們的變換性質（其定義見表 1），那麽把它們各寫成兩個 2×2 矩陣的直接乘積之後，直接乘積中的第一個因子可以由這三個參數完全決定；結果見公式 (2.7)．由於這個公式我們用不着分別來計算五種不同的相互作用，而只需在一次計算中就可求得任何相互作用混合或不混合時的角關聯、角分佈和能譜因子公式．

其次我們寫出電子的波函數，並證明電子的球面波函數的絕對值平方可以用轉動羣的表象來表示（見公式(2.11)）．此外又利用轉動羣的表象將中微子的平面波展成球面波之和．

在第三節中我們用和時間相關的微擾理論來計算 β–衰變的躍遷幾率．證明了電子的波函數雖然含有外射波和內射波，但躍遷幾率僅由外射波所引起的．由於我們考慮到原子核的庫倫場對於所放射出的電子的影響，電子的波函數不是平面波，但是結果證明每單位時間內，β–衰變的躍遷幾率和通常把電子波函數看成平面波所得到的躍遷幾率的形式完全相同，而且證明電子的波函數也可以展成和中微子的平面波完全相類似的展開式，只不過電子的波函數展成庫倫波函數，有相角 $\delta_{j,l}$ 出現，其徑波函數表示成匯合超幾何函數，而中微子的平面波展成自由粒子波函數，無相角 $\delta_{j,l}$ 出現，其徑波函數表示成貝塞耳函數，並且這兩個波函數的展開式的係數完全一樣，都可用轉動羣的表象來表示．結果見公式 (3.6) 和 (3.7)．

在第四節我們求出相互作用混合時任何次禁戒躍遷的 β–中微子角關聯的公式．為了計算方便起見，我們把實驗系的 z–軸取成中微子的運動方向，那麽在中微子波函數的展開式中，轉動羣的表象就變成單位矩陣；而在電子波函數中轉動羣 R_e 就是把 z–軸從中微子的運動方向轉動為電子的運動方向．若用歐勒 (Euler) 角來表示，

$$R_e=\left\{\varphi-\frac{\pi}{2},\theta,0\right\},$$

則 θ 角就是中微子和電子之間的夾角．在計算過程中，我們沿用斯必爾斯和柏林斯托爾的方法，把電子和中微子的總角動量 j 和 j_ν 合成 J．由於我們計算第 L 次禁戒躍遷（L 可為 0, 1, 2, …），角關聯的公式中所含有之原子核算符的數量級是 $\sim R^L$（R 是原子核的半徑）．所以我們必須選擇 j 和 j_ν 使得電子和中微子的軌道角動量 l 和 l_ν 合成 $L-\eta_K$（η_K 是 0, 或是 1），亦卽 $l+l_\nu=L-\eta_K$．應用這個方法，並利用直角

坐標中不可約張量算符可以寫成立體球諧函數這一性質，我們就求出 β-中微子角關聯的公式 (4.19). 在這公式中含有兩個轉動羣表象的乘積. 應用附錄 1 中的公式 (11) 把這乘積化爲勒琴德 (Legendre) 多項式 $P_k(\cos\theta)$，因此 β-中微子的角關聯是通過 $P_k(\cos\theta)$ 表示出來的 (見公式 (4.23))，由這公式也可看出 β-中微子角關聯中所含之 $\cos\theta$ 的最大冪數頂多是禁戒躍遷的次數加 1. 這和旁人的結論是完全相同的.

在第五節我們求出 β-能譜因子. 我們應用轉動羣的不同的不可約表象是正交的這一性質，對於電子和中微子立體角 ω_e 和 ω_ν 積分之後，立即可從 β-中微子角關聯公式 (4.19) 求出 β-能譜因子公式 (5.4) 和 (5.5). 這個公式跟葛魯林和伯塞的結果是完全相同的，但是跟巴納爾基和撒哈[11] 的結果略有不同. 首先由於公式 (2.7) 跟巴納爾基和撒哈的公式 (29) 不同，這就使得他們和我們所求得的公式 (5.4) 和 (5.5) 有時相差符號；和葛魯林和伯塞的公式也同樣相差符號.

在第六節中我們求出 β-γ 角關聯的公式. 關於 γ-射線角分佈這方面，林和法爾柯夫[15] 已求出當電 2^L 極和磁 2^{L-1} 極輻射混合時 γ-射線角分佈的公式. 我們就沿用他們的結果 (見 (6.4) 和 (6.5)). 關於電子角分佈這一方面，我們首先應將中微子的運動方向平均起來，同時也應將電子和中微子的自旋方向平均起來，所以把公式 (3.11) 對中微子的立體角 ω_ν 積分，在積分時仍應用轉動羣的不同的不可約表象是正交的這一性質. 積分之後，仍應用不可約張量算符可以表示成立體球諧函數這一性質來求出原子核方位固定時，它在第 L 次禁戒躍遷時所放出電子的角分佈. 結果見公式 (6.7). 計算的步驟與計算 β-中微子的步驟是完全類似的.

在附錄中給出必要的數學公式.

我們曾具體地計算過在容許躍遷、第一次及第二次禁戒躍遷時 β-中微子角關聯的公式. 關於第一次禁戒躍遷的結果跟葛魯林、密克斯與莫瑞塔[12] 的公式是相同的.

二. 狄喇克矩陣變換性質，輕子的波函數

在 β-衰變理論中，核子和輕子(即電子和中微子)的相互作用通常是五種洛倫茲不變算符，即 S, V, T, A, P; 或是它們的線性組合. 因之相互作用 H 可以是

$$\left.\begin{aligned}
S:&\quad H_S = G_S(\beta Q\cdot\beta)\,\delta(\mathbf{r}_H-\mathbf{r}_L)\\
V:&\quad H_V = G_V[(1\,Q\cdot 1)-(\boldsymbol{\alpha}\,Q\cdot\boldsymbol{\alpha})]\,\delta(\mathbf{r}_H-\mathbf{r}_L)\\
T:&\quad H_T = G_T\,[(\beta\boldsymbol{\sigma}\,Q\cdot\beta\boldsymbol{\sigma})+(\beta\boldsymbol{\alpha}\,Q\cdot\beta\boldsymbol{\alpha})]\,\delta(\mathbf{r}_H-\mathbf{r}_L)\\
A:&\quad H_A = G_A\,[(\boldsymbol{\sigma}\,Q\cdot\boldsymbol{\sigma})-(\gamma_5\,Q\cdot\gamma_5)]\,\delta(\mathbf{r}_H-\mathbf{r}_L)\\
P:&\quad H_P = G_P\,(\beta\,\gamma_5\,Q\cdot\beta\,\gamma_5)\,\delta(\mathbf{r}_H-\mathbf{r}_L);
\end{aligned}\right\}\qquad(2.1)$$

或是它們的線性組合:

$$H=\sum_{K} g_{K}(KQ\cdot K)\,\delta(\mathbf{r}_H-\mathbf{r}_L),\tag{2.2}$$

上式中 G_S, G_V, G_T, G_A, G_P 是相互作用常數，g_K 和 G_K 的關係見表 2；K 可爲標量，可爲矢量（見表 2）；Q 是將原子核中的一個核子由中子變成質子；$\mathbf{r}_H$ 和 $\mathbf{r}_L$ 分別是核子和輕子的坐標；公式 (2.1) 和 (2.2) 的因子 $(KQ\cdot K)$ 中，第一個算符是運算在原子核的波函數上，第二個是運算在輕子的波函數上.

這五種相互作用分別包括 16 個 4×4 矩陣，即是:

$$\beta,1,\boldsymbol{\alpha}(\alpha_x,\alpha_y,\alpha_z),\quad \beta\boldsymbol{\sigma}(\beta\sigma_x,\beta\sigma_y,\beta\sigma_z),\quad \beta\boldsymbol{\alpha}(\beta\alpha_x,\beta\alpha_y,\beta\alpha_z)$$
$$\boldsymbol{\sigma}(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z),\quad \gamma_5=-i\,\alpha_x\alpha_y\alpha_z,\quad \beta\gamma_5;$$

其中 β, $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 就是平常的狄喇克矩陣；1 是單位矩陣. 若這 16 個矩陣的矩陣元表示成 $(\beta_e\sigma_e\,|\,K\,|\,\beta_v\sigma_v)$，其中 $\beta_e,\beta_v;\sigma_e,\sigma_v$ 分別可以等於 ±1，那麼每 4×4 矩陣可以等於兩個 2×2 矩陣的直接乘積[1].

在今後的計算中需要把 KC（C 是電荷共軛算符，等於 $i\beta\alpha_y$）分解爲兩個 2×2 矩陣之直接乘積. 當 $\mathbf{K}$ 爲矢量時，需要應用 $\mathbf{K}$ 的不可約分量，即

$$K_{+1}=-\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}},\qquad K_0=K_z,\qquad K_{-1}=\frac{K_x-iK_y}{\sqrt{2}}\tag{2.3}$$

和

$$K^{\dagger}_{+1}=-\frac{K_x-iK_y}{\sqrt{2}},\qquad K^{\dagger}_0=K_z,\qquad K^{\dagger}_{-1}=\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}};\tag{2.4}$$

上式中 «†» 代表厄密共軛量. 下列公式給出分解的結果:

$$\left.\begin{aligned}
&\beta C=i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \alpha^{\dagger}_{\lambda}C=i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\times\omega_\lambda\quad(\lambda=+1,0,-1),\\
&1\,C=-\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\qquad \beta\alpha^{\dagger}_{\lambda}C=i\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\omega_\lambda\quad(\lambda=+1,0,-1),\\
&\beta\sigma^{\dagger}_{\lambda}C=-i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\times\omega_\lambda\quad(\lambda=+1,0,-1),\qquad \gamma_5C=-i\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix},\\
&\sigma^{\dagger}_{\lambda}C=\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\times\omega_\lambda\quad(\lambda=+1,0,-1),\qquad \beta\gamma_5C=-i\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\}\tag{2.5}$$

上式中 $\omega_\lambda(\lambda=+1,0,-1)$ 是 2×2 矩陣:

$$\omega_{+1}=-i\sqrt{2}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad \omega_0=i\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\qquad \omega_{-1}=-i\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.\tag{2.6}$$

1) 參照巴納爾基和撒哈的文章[11].

由公式 (2.5) 可知若 K 爲標量，則 $KC = a_K \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$；若 $\mathbf{K}$ 爲矢量，則 $K_\lambda^\dagger C = = a_K \times \omega_\lambda\ (\lambda = +1, 0, -1)$；$a_K$ 是 2×2 矩陣.

沿用巴納爾基和撒哈的方法，我們知道當坐標經過三維空間轉動，或是空間反射，或是總反射（即對空間坐標和時間坐標都經過反射）時，對於不同的矩陣 K，其變換性質也不同．用 ξ_K, η_K, ζ_K 分別表示在上述三種變換情形下 K 之變換性質．ξ_K, η_K, ζ_K 之數值或爲 0，或爲 1．其定義見表 1：

表 1

變　換	參　數	0	1
三維空間轉動	ξ_K	標量	矢量
空間反射	η_K	符號不變（偶宇稱）	符號改變（奇宇稱）
總反射	ζ_K	符號不變	符號改變

對於不同的矩陣，ξ_K, η_K, ζ_K 的數值也不同，它們的數值見表 2：

表 2

相 互 作 用	K	g_K	ξ_K	η_K	ζ_K
S	β	G_S	0	0	0
V	I	G_V	0	0	1
	$\boldsymbol{\alpha}$	$-G_V$	1	1	1
T	$\beta\boldsymbol{\sigma}$	G_T	1	0	0
	$\beta\boldsymbol{\alpha}$	G_T	1	1	0
A	$\boldsymbol{\sigma}$	G_A	1	0	1
	γ_5	$-G_A$	0	1	1
P	$\beta\gamma_5$	G_P	0	1	0

已知矩陣 K 對坐標變換的各種不同的性質之後，公式 (2.5) 中 a_K 的矩陣元可以由參數 ξ_K, η_K, ζ_K 完全決定[1)]：

$$(\beta_e\,|a_K|\,\beta_\nu) = i\,(-1)^{\xi_K+\eta_K}\,\beta_e^{\zeta_K}\,\delta_{\beta_e,\,(2\eta_K-1)\,\beta_\nu}. \tag{2.7}$$

由於這個公式我們就用不着分別來計算五種不同的相互作用，而只需在一次計算中就

1) 我們所得的公式 (2.7) 和巴納爾基和撒哈[11] 的公式 (2.9) 不同，因此我們所求得的能譜因子公式和他們的公式不同.

可求得任何相互作用混合或不混合時的角關聯、角分佈和能譜因子公式.

在將來的計算中由於我們考慮到原子核的庫倫場 $V(r)=-\frac{ze^2}{r}$ 對於電子的影響,能量爲 W 的電子在單位能量間隔中歸一化的波函數 $\psi_{jlm}(\mathbf{r}, W)$ 滿足狄喇克方程1)

$$[-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}-\beta+V(r)]\,\psi_{jlm}=W\psi_{jlm} \qquad (p=\sqrt{W^2-1}) \tag{2.8}$$

(j 是總量子數, l 是軌道量子數, m 是磁量子數). 這方程的解是2)

$$\psi_{jlm}=\begin{pmatrix}-i\,\Omega_{jl'm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)f(r)\\ \Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)g(r)\end{pmatrix}; \qquad \begin{array}{l}\Omega^{\mu}_{jlm}=C^{l,\,m-\mu;\,\frac{1}{2},\,\mu}_{j,\,m}\,Y^{m-\mu}_{l}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) \quad \mu=\pm\frac{1}{2},\\ l'=2j-l=\begin{cases}l+1 & j=l+\frac{1}{2},\\ l-1 & j=l-\frac{1}{2}.\end{cases}\end{array} \tag{2.9}$$

式中 $C^{l,\,m-\mu;\,\frac{1}{2},\,\mu}_{j,\,m}$ 是克萊必西-戈登 (Clebsch-Gordon) 係數, $Y^{m-\mu}_{l}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ 是球諧函數,它們的定義見附錄中公式 (1); $f(r)$ 和 $g(r)$ 是徑波函數[16]:

$$\left.\begin{array}{l}
r\begin{Bmatrix}f\\ g\end{Bmatrix}=\dfrac{(1\mp W)^{1/2}(2pr)\,\gamma\, e^{\pi\alpha zW/2p}\,|\Gamma(\gamma+i\alpha zW/p)|}{2(\pi p)^{1/2}\,\Gamma(2\gamma+1)}\times\\
\qquad\times\left\{e^{-ipr+i\eta}(\gamma+i\alpha zW/p)\,F(\gamma+1+i\alpha zW/p,2\gamma+1;2ipr)\mp\text{共軛複函數}\right\};\\
\gamma=(\kappa^2-\alpha^2z^2)^{1/2}, \qquad \kappa=\begin{cases}-\left(j+\frac{1}{2}\right)=-(l+1) & \text{當 } j=l+\frac{1}{2},\\ j+\frac{1}{2}=l & \text{當 } j=l-\frac{1}{2},\end{cases}\\
\qquad e^{2i\eta}=-(\kappa-i\alpha z/p)/(\gamma+i\alpha zW/p);\\
\text{當 } r\to\infty, \qquad rf=-[(W-1)/\pi p]^{1/2}\sin(pr+\delta_{j,l}),\\
\qquad\qquad rg=[(W+1)/\pi p]^{1/2}\cos(pr+\delta_{j,l}),\\
\qquad\qquad \delta_{j,l}=(\alpha zW/p)\log 2pr-\arg\Gamma(\gamma+i\alpha zW/p)+\eta-\pi\gamma/2.
\end{array}\right\} \tag{2.10}$$

此外我們利用附錄 1 中的公式 (6), (8), (9) 和 (11), 可以證明

1) 這篇文章中所用的物理量完全是無量綱的. 能量, 動量, 長度和時間的單位分別以 mc^2, mc^2, $\hbar/mc$ 和 $\hbar/mc^2$ 表示 ($\hbar$ 是普朗克常數除以 2π, m 是電子質量的靜止質量, c 是光速).

2) 見 Ахиезер, А. И. и Берестецкий, В. Б., Квантовая электродинамика (Москва) (以後簡寫爲 К. Э.) 第二章, §§10, 11. 我們所用的哈密頓算符是

$$H=-\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}-\beta+V(r),$$

而 К. Э. 中所用的哈密頓算符是 $H=\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p}+\beta+V(r)$ (見 К. Э. 第 72 頁), 因此我們所得的波函數和 К. Э. 中所得的波函數相差一正么變換.

$$\sum_{\mu} Q^{\mu}_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Q^{\mu *}_{jl\bar{m}}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \sum_{\mu} Q^{\mu}_{jl'm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) Q^{\mu *}_{jl'\bar{m}}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) =$$

$$= \sum_{\mu} C^{l,0;\frac{1}{2},\mu}_{j,\mu}\, Y^0_l(0)\, \mathfrak{D}^{(j)}(R_e)_{m\mu}\, C^{l,0;\frac{1}{2},\mu}_{j,\mu}\, Y^0_l(0)\, \mathfrak{D}^{(j)}(R_e)^{*}_{\bar{m}\mu}. \quad (2.11)$$

式中 R_e 表示坐標軸的轉動，使 z–軸從實驗室系的 z–軸變成電子運動的方向；亦卽若用歐勒角來表示，則

$$R_e = \left\{\varphi - \frac{\pi}{2}, \theta, 0\right\},$$

$\mathfrak{D}^{(j)}(R_e)$ 是轉動羣的表象．

至於中微子的波函數，我們要把平面波展成球面波之和． 在將來的計算中，我們要應用自旋爲 μ_ν 的中微子在負能態的、並在單位體積內歸一化的波函數 $\psi^{(-)}_{\nu\mu_\nu}(\mathbf{r})$． 應用電荷共軛算符[1)]

$$C = i\beta\alpha_y,$$

我們得到

$$\psi^{(-)}_{\nu,\mu_\nu} = C\,\psi^{(+)*}_{\nu,-\mu_\nu} \quad (2.12)$$

式中 $\psi^{(+)}_{\nu,-\mu_\nu}$ 是自旋爲 $-\mu_\nu$ 的中微子在正能態的波函數． 若將 $\psi^{(+)}_{\nu,-\mu_\nu}(\mathbf{r})$ 展成球面波之和[2)]，則

$$\psi^{(+)}_{\nu,-\mu_\nu}(\mathbf{r}) = \sum_{j_\nu l_\nu m_\nu} C^{l_\nu,0;\frac{1}{2},-\mu_\nu}_{j_\nu,-\mu_\nu}\, Y^0_{l_\nu}(0)\, \mathfrak{D}^{(j_\nu)}(R_\nu)^{*}_{m_\nu,-\mu_\nu}\, \varphi_{j_\nu l_\nu m_\nu}(\mathbf{r}), \quad (2.13)$$

式中 R_ν 表示坐標軸的 z–軸從實驗室系的 z–軸轉到中微子運動的運動方向

$$\varphi_{j_\nu l_\nu m_\nu}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} Q_{j_\nu l'_\nu m_\nu}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) g_{l'_\nu}(p_\nu r) \\ Q_{j_\nu l_\nu m_\nu}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) g_{l_\nu}(p_\nu r) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} g_{l_\nu}(p_\nu r) = (2\pi)^{3/2}\, i^{l_\nu} \dfrac{J_{l_\nu+\frac{1}{2}}(p_\nu r)}{\sqrt{P_\nu r}}, \\ l'_\nu = 2j_\nu - l_\nu = \begin{cases} l_\nu+1 & j_\nu = l'_\nu + \dfrac{1}{2} \\ l_\nu - 1 & j_\nu = l_\nu - \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array} \quad (2.14)$$

式中 $J_{l_\nu+\frac{1}{2}}(pr)$ 是貝塞耳函數． 若坐標軸的 z–軸取成中微子的運動方向，那麽 R_ν 就變成轉動羣中的單位元，因之

1) 見 K. Э. 的第二章中第 53 頁．

2) 見 K. Э. 的第二章中第 70 頁，公式 (10.24)，只需將公式用轉動羣的表象來表示，卽得公式 (2.13)，但 $\varphi_{j_\nu l_\nu m_\nu}(\mathbf{r})$ 和 K. Э. 中所給的形式不同，因我們所用的哈密頓算符不同（見第 102 頁，附註 2)．

$$\mathfrak{D}^{(j_\nu)}(R_\nu)_{m_\nu,-\mu_\nu}=\delta_{m_\nu,-\mu_\nu}.$$

於是 (2.13) 就變成

$$\psi^{(+)}_{\nu,-\mu_\nu}(\mathbf{r})=\sum_{j_\nu l_\nu} C^{l_\nu,0;\frac{1}{2},-\mu_\nu}_{j_\nu,-\mu_\nu}\,Y^0_{l_\nu}(0)\,\varphi_{j_\nu l_\nu,-\mu_\nu}(\mathbf{r}). \tag{2.15}$$

三. β-衰變的幾率

我們知道 β-放射性的原子核在放射 β^--粒子(卽電子)時,同時也放出中微子來;在放射 β^+-粒子(卽正電子)時,同時也放出反中微子來. 但是爲了數學計算的方便,我們可以假設原子核在放射電子時,同時吸收在負能態的中微子;在放射正電子時,同時吸收一個在負能態的反中微子,由這樣的假設所得到的物理結果是一樣的[17]. 我們現在只考慮 β^--衰變的情形,β^+-衰變的情形用完全類似的方法就可解決.

在這節中我們所討論的物理問題就是考慮到原子核的庫倫場對所放射出的 β-粒子的影響時,如何求出 β-粒子的能量在 W 和 $W+dW$ 之間,其方向是立體角 ω_e 和 $\omega_e+d\omega_e$ 之間;中微子的方向是 ω_ν 和 $\omega_\nu+d\omega_\nu$ 之間的幾率. 我們應用和時間相關的微擾理論來計算,我們假設先有在負能態的中微子,動量是 $-\mathbf{p}_\nu$, 自旋是 μ_ν, 入射到 β-放射性的原子核上,而這原子核在未放射 β^--射線之前的自旋是 I_i, 磁量子數是 M_i. 那麼整個系統的始態波函數可以寫成:

$$\Psi_I(\mathbf{r}_H,\mathbf{r}_L,t)=U^{M_i}_{I_i}(\mathbf{r}_H)\,\psi^{(-)}_{\nu,\mu_\nu}(\mathbf{r}_L)\,e^{-iE_It} \tag{3.1}$$

式中 $U^{M_i}_{I_i}(\mathbf{r}_H)$ 是原子核的始態波函數; $E_I=E_U-p_\nu$, E_U 是原子核在始態時的能量. 假設放射 β^--射線後原子核的自旋是 I_h, 磁量子數是 M_h, 波函數是 $V^{M_h}_{I_h}(\mathbf{r}_H)$. 整個系統的波函數可以表示成爲:

$$\Psi(\mathbf{r}_H,\mathbf{r}_L,t)=a_I(t)\,\Psi_I+\sum_{jlm}\int a_{jlmW}(t)\,V^{M_h}_{I_h}(\mathbf{r}_H)\,\psi_{jlm}(\mathbf{r}_L,W)\,e^{-iE_ht}\,dW; \tag{3.2}$$

式中 $E_h=E_v+W$, E_v 是原子核在放射 β^--粒子後的能量, $|a_I(t)|^2$ 表示在時間 t 時整個系統在始態的幾率, $|a_{jlmW}(t)|^2$ 表示在時間 t 時放射出電子在 j, l, m 態,能量爲 W 的幾率. 應用和時間相關的微擾理論卽可求出 $\Psi(\mathbf{r}_H,\mathbf{r}_L,t)$. 電子的波函數 $\psi(\mathbf{r},t)$ 可由下式求出:

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{r},t)&=\int V^{M_h*}_{I_h}(\mathbf{r}_H)\,e^{iE_vt}\,\Psi(\mathbf{r}_H,\mathbf{r}_L,t)\,d\mathbf{r}_H\\&=\sum_{jlm}\int\Big[\sum_K g_K\int\big(V^{M_h*}_{I_h}(\mathbf{r})\,KQ\,U^{M_i}_{I_i}(\mathbf{r})\big)\cdot\big(\psi^*_{jlm}(\mathbf{r})\,K\,\psi^{(-)}_{\nu\mu_\nu}(\mathbf{r})\big)\,d\mathbf{r}\Big]\times\end{aligned}$$

$$e^{-i(W_0-W_\nu)t}\frac{e^{-i(W+W_\nu-W_0)t}-1}{W+W_\nu-W_0}\psi_{jlm}(\mathbf{r},W)\,dW, \tag{3.3}$$

式中 $W_0=E_0-E_\nu$, $W_\nu=p_\nu$. 應用公式 (2.10) 即可得 $\psi(\mathbf{r},t)$ 的近似公式爲:

$$\psi(\mathbf{r},t)\to i\pi\frac{e^{i[p_0r-(W_0-W_\nu)t]}}{p_0r}\sum_{jlm}e^{i\delta_{jl}}\begin{pmatrix}[(W_0-W_\nu-1)p_0/\pi]^{1/2}\,\Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\\ [(W_0-W_\nu+1)p_0/\pi]^{1/2}\,\Omega_{jlm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left[\sum_K g_K\int(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r})\,KQ\,U_{I_i}^{M_i}(\mathbf{r}))\cdot(\psi_{jlm}^{*}(\mathbf{r},W)\,K\,\psi_{\nu\mu_\nu}^{(-)}(\mathbf{r}))\,d\mathbf{r}\right]_{W=W_0-W_\nu}$$

$$\left(r<\frac{p_0}{W_0-W_\nu}t\right), \tag{3.4}$$

式中 $p_0=\sqrt{(W_0-W_\nu)^2-1}$. 由此可知 $\psi(\mathbf{r},t)$ 雖然含有外射波和內射波，但計算結果證明躍遷幾率是僅由外射波所引起的.

由於 β^- 放射性的原子核在放射 β^--粒子前後方位均不固定，那末它每秒中放出電子的能量在 W 和 $W+dW$ 之間，方向在立體角 ω_e 和 $\omega_e+d\omega_e$ 之間，中微子的方向在 ω_ν 和 $\omega_\nu+d\omega_\nu$ 之間的幾率等於

$$p(W)\,dW=\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{\mu_\nu}\frac{p_\nu^2\,d\omega_\nu}{(2\pi)^3}|\psi(\mathbf{r},t)|^2\,dW\,r^2\,d\omega_e\frac{dr}{dt}. \tag{3.5}$$

將公式 (3.4) 代入並利用公式 (2.11), (2.12) 和 (2.13), 即可得躍遷幾率爲

$$p(W)\,dW=\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{\mu\mu_\nu}\left|\sum_K g_K\int(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r})\,KQ\,U_{I_i}^{M_i}(\mathbf{r}))\times\right.$$

$$\left.\times(\psi_\mu^*(\mathbf{r})\,KC\,\psi_{\nu,-\mu_\nu}^{(+)*}(\mathbf{r}))\,d\mathbf{r}\right|^2 p_\nu^2\,d\omega_e\,d\omega_\nu\,dW; \tag{3.6}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\psi_\mu(\mathbf{r})&=\sum_{jlm}C_{j,\mu}^{l,0;\frac{1}{2},\mu}\,Y_l^0(0)\,\mathfrak{D}^{(j)}(R_e)_{m\mu}^{*}\,e^{-i\delta_{j,l}}\,\psi_{jlm}(\mathbf{r}),\\ \psi_{\nu,-\mu_\nu}^{(+)}(\mathbf{r})&=\sum_{j_\nu l_\nu m_\nu}C_{j_\nu,-\mu_\nu}^{l_\nu0;\frac{1}{2},-\mu_\nu}\,Y_{l_\nu}^0(0)\,\mathfrak{D}^{(j_\nu)}(R_\nu)_{m_\nu,-\mu_\nu}^{*}\,\phi_{j_\nu l_\nu m_\nu}(\mathbf{r}).\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

經過這一系列的計算證明：由於我們考慮到原子核的庫倫場對於放射出的電子的影響，電子的波函數不能用平面波，但是每單位時間內 β-衰變的幾率和通常所得的結果完全一樣，只不過電子波函數用庫倫波函數 ψ_{jlm} 展開，並有相角 $\delta_{j,l}$ 出現而已.

四. β-中微子角關聯

在上節將 β-衰變的每單位時間內的躍遷幾率寫成公式 (3.6) 之後，要求 β-中微子角關聯就較方便了. 爲了計算的簡便起見，我們可以把實驗室系的 z-軸取成中微子

的運動方向，那麽中微子的波函數 $\psi_{\nu-\mu_\nu}^{(+)}(\mathbf{r})$ 就採取公式 (2.15) 的形式，而 R_e 就是把 z-軸從中微子運動方向轉動爲電子的運動方向，因之

$$R_e=\left\{\varphi-\frac{\pi}{2},\theta,0\right\}$$

中的 θ 角就是中微子和電子之間的夾角. 若將公式 (3.6) 分成各次禁戒躍遷之和，則

$$P(W)\,dW=\frac{1}{(2\pi)^5}F(z,W)\sum_{L=0}^{\infty}C_L\,p_\nu^2\,pW\,d\omega_e\,d\omega_\nu\,dW, \tag{4.1}$$

式中 C_L 卽代表第 L 次禁戒躍遷的 β-中微子角關聯. 將上式對電子和中微子之間的夾角積分之後，就得到一般文獻所給出的 β-能譜因子，而

$$\left.\begin{aligned}\sum_{L=0}^{\infty}C_L&=\left(\frac{pW}{2\pi^2}F(z,W)\right)^{-1}4\pi\,\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_i,M_h}\sum_{\mu,-\mu_\nu}\Bigg|\sum_K g_K\int\left(V_{I_h}^{M_h*}\,KQ\,U_{I_i}^{M_i}\right)\times\\&\quad\times\left(\psi_\mu^*\,KC\,\psi_{\nu-\mu_\nu}^{(+)*}\right)d\mathbf{r}\Bigg|^2\\&=\left(\frac{pW}{2\pi^2}F(z,W)\right)^{-1}4\pi\,\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_i,M_h}\sum_{\mu,-\mu_\nu}\Bigg|\sum_K g_K\sum_{jlm}\sum_{j_\nu l_\nu}\times\\&\quad\times\left(C_{j,\mu}^{l,0;\frac{1}{2},\mu}\,Y_l^0(0)\,e^{i\delta_{jl}}\,\mathfrak{D}^{(j)}(R_e)_{m\mu}\right)\left(C_{j_\nu,-\mu_\nu}^{l_\nu,0;\frac{1}{2},-\mu_\nu}\,Y_{l_\nu}^0(0)\right)\times\\&\quad\times\int\left(V_{I_h}^{M_h*}\,KQ\,U_{I_i}^{M_i}\right)\left(\psi_{jlm}^*\,KC\,\varphi_{j_\nu l_\nu,-\mu_\nu}^*\right)d\mathbf{r}\Bigg|^2.\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

其次 $F(z,W)$ 是表示原子核的庫倫場對於所放出的電子的影響，

$$F(z,W)=\frac{4(2pR)^{2s-2}\,e^{\pi\alpha zW/p}\,|\Gamma(s+i\alpha zW/p)|^2}{[\Gamma(2s+1)]^2}\,\frac{1+s}{2}\qquad s=(1-\alpha^2z^2)^{1/2};$$

上式中 α 是精細結構常數，z 是原子核的電荷 (如原子核放出正子，z 是負的)，R 是原子核的半徑，Γ 是咖瑪函數. 要精確地計算 $F(z,W)$ 是很困難的，但也有近似的公式[1]. 在波恩 (M. Born) 近似法中 $(\alpha W/p\ll 1)$，$F(z,W)\approx F(0,W)=1$.

在這節中我們要計算 C_L. 對於 L 次禁戒躍遷來講，C_L 必須滿足：(1) C_L 含有原子核算符的數量級 $\sim R^L$；(2) C_L 中的原子核算符的宇稱都是相同的，而宇稱是奇還是偶，卽隨 L 是奇數還是偶數而定；(3) 若有些原子核算符所給出的選擇定則已在低次禁戒躍遷中出現過時，那麽在 C_L 中就忽略它們. 我們知道原子核算符中含

1) 見 Грошев, Л. В. 和 Шапиро, И. С., Спектроскопия атомных ядер, (Москва), 1952, 第 XI 章, 第 349 頁.

有核子坐標 $\mathbf{r}$ 和狄喇克矩陣．但是由公式（2.3）可知，奇宇稱的矩陣（$\eta_K=1$）的形式是 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$，所以將中微子波函數的小分量和電子波函數大分量混合，就使得原子核矩陣元減小一個因子 $\sim V/C\sim R$；而偶宇稱的矩陣（$\eta_K=0$）的形式是 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$，所以將波函數的大分量和大分量混合，小分量和小分量混合，就不會改變原子核算符的數量級．因此，要使原子核的算符的數量是 R^L，原子核算符中所包含的核子坐標 $\mathbf{r}$ 的冪數須是 $L-\eta_K$．這樣也就使得條件（1）和（2）不互相矛盾．

現在我們利用不可約張量算符可以寫成立體諧函數這一性質來計算 C_L．先將電子和中微子的波函數（公式（2.9）和（2.14））改寫成為

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_{jma}(\mathbf{r},\sigma_a,\beta_e)=C_{j,m}^{l,m-\sigma_e;\frac{1}{2},\sigma_e}\,\mathfrak{Y}_l^{m-\sigma_e}(\mathbf{r})\,F_l^{\beta_e a}\\
&\qquad\left(a=\pm1,\beta_e=\pm1,\sigma_e=\pm\frac{1}{2},l=j+\frac{1}{2}a\beta_e\right)\\
&\varphi_{j_\nu m_\nu a}(\mathbf{r},\sigma_\nu,\beta_\nu)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(g_{l_\nu}(p_\nu r)/r^{l_\nu})\,C_{j_\nu,m_\nu}^{l_\nu,m_\nu-\sigma_\nu;\frac{1}{2},\sigma_\nu}\,\mathfrak{Y}_{l_\nu}^{m_\nu-\sigma_\nu}(\mathbf{r})\\
&\xrightarrow{r\to0}\frac{4\pi}{\sqrt{2}}\,i^{l_\nu}\,\frac{p_\nu^{l_\nu}}{(2l_\nu+1)!!}\,C_{j_\nu,m_\nu}^{l_\nu,m_\nu-\sigma_\nu;\frac{1}{2},\sigma_\nu}\,\mathfrak{Y}_{l_\nu}^{m_\nu-\sigma_\nu}(\mathbf{r})\\
&\qquad\left(a_\nu=\pm1,\beta_\nu=\pm1,\sigma_\nu=\pm\frac{1}{2},l_\nu=j_\nu+\frac{1}{2}a_\nu\beta_\nu\right),
\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

式中 $\mathfrak{Y}_l^{m-\sigma}(\mathbf{r})=r^l\,Y_l^{m-\sigma}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$ 是立體諧函數，$(2l_\nu+1)!!=\frac{(2l_\nu+1)!}{2^{l_\nu}(l_\nu)!}$，而

$$F_l^{11}=-i\,\frac{f_{l-1}}{r^l},\quad F_l^{-11}=\frac{g_l}{r^l},\quad F_l^{1\,-1}=-i\,\frac{f_{-l-2}}{r^l},\quad F_l^{-1\,-1}=\frac{g_{-l-1}}{r^l}.\tag{4.4}$$

用了這種表示方法之後，（4.2）中 $C_{j,\mu}^{l,0;\frac{1}{2},\mu}\,Y_l^0(0)\,e^{i\delta_{jl}}$ 等因子變成

$$\left.\begin{aligned}
&C_{j,\mu}^{l,0;\frac{1}{2},\mu}\,Y_l^0(0)\,e^{i\delta_{jl}}=a^{\frac{1}{2}+\mu}\sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}}{4\pi}}\,e^{i\delta_{j,j-\frac{1}{2}a}},\\
&C_{j_\nu,-\mu_\nu}^{l_\nu,0;\frac{1}{2},-\mu_\nu}\,Y_{l_\nu}^0(0)=a_\nu^{\frac{1}{2}+\mu_\nu}\sqrt{\frac{j_\nu+\frac{1}{2}}{4\pi}}.
\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

這樣一來，（4.2）變成

$$\begin{aligned}
\sum_{L=0}^{\infty}C_L=&\left(\frac{pW}{2\pi^2}F(z,W)\right)^{-1}4\pi\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{\mu,\mu_\nu}\left|\sum_K g_K\sum_{jma}\sum_{j_\nu a_\nu}\left(a^{\frac{1}{2}+\mu}\sqrt{\frac{j+\frac{1}{2}}{4\pi}}\,e^{i\delta_{j,j-\frac{1}{2}a}}\right)\times\right.\\
&\left.\times\left(a_\nu^{\frac{1}{2}-\mu_\nu}\sqrt{\frac{j_\nu+\frac{1}{2}}{4\pi}}\right)\mathfrak{D}^{(j)}(R_e)_{m\mu}\int(V_{I_h}^{M_h*}KQ\,U_{I_i}^{M_i})\,(\psi_{jma}^{*}KC\,\varphi_{j_\nu-\mu_\nu a_\nu}^{*})\,d\mathbf{r}\right|^2,
\end{aligned}\tag{4.6}$$

式中

$$(\psi^{*}_{jma}\, KC\, \varphi^{*}_{j_\nu-\mu_\nu a_\nu}) = \sum_{\beta_e\beta_\nu,\sigma_e\sigma_\nu} (KC)^{\sigma_e\sigma_\nu}_{\beta_e\beta_\nu} (\psi_{jma}(\mathbf{r},\sigma_e,\beta_e)\,\varphi_{j_\nu-\mu_\nu a}(\mathbf{r},\sigma_\nu,\beta_\nu))^{*}. \quad (4.7)$$

在這裏我們應用斯必爾斯和柏林斯托爾的方法來計算上式的右端. 先將電子和中微子的總角動量 j 和 j_ν 合成爲總角動量 J, 卽

$$\Psi_{JM;ja;j_\nu a_\nu}(\mathbf{r};\sigma_e,\beta_e;\sigma_\nu,\beta_\nu) = \sum_{m+\bar{m}_\nu=M} C^{j,m;j_\nu,\bar{m}_\nu}_{J,M}\,\psi_{jma}(\mathbf{r}\,\sigma_e\,\beta_e)\,\varphi_{j_\nu \bar{m}_\nu a_\nu}(\mathbf{r}\,\sigma_\nu\,\beta_\nu). \quad (4.8)$$

由於克萊必西-戈登係數正交性質,

$$\psi_{jma}(\mathbf{r}\,\sigma_e\,\beta_e)\,\varphi_{j_\nu-\mu_\nu a_\nu}(\mathbf{r}\,\sigma_\nu\,\beta_\nu) = \sum_{J=|j-j_\nu|}^{j+j_\nu} C^{j,m;j_\nu,-\mu_\nu}_{J,M}\,\Psi_{JM;ja;j_\nu a_\nu}(\mathbf{r};\sigma_e\,\beta_e;\sigma_\nu\,\beta_\nu). \quad (4.9)$$

將公式 (4.9) 代入公式 (4.7), 得到

$$(\psi^{*}_{jma}\, KC\, \varphi^{*}_{j_\nu-\mu_\nu a}) = \sum_{J=|j-j_\nu|}^{j+j_\nu} C^{jm,j_\nu-\mu_\nu}_{JM} \sum_{\beta_e\beta_\nu,\sigma_e\sigma_\nu} (KC)^{\sigma_e\sigma_\nu}_{\beta_e\beta_\nu}\,\Psi_{JM;ja;j_\nu a_\nu}(\mathbf{r};\sigma_e\,\beta_e;\sigma_\nu\,\beta_\nu). \quad (4.10)$$

由於我們要求第 L 次禁戒躍遷, 必須 C_L 所含之原子核算符的數量級爲 $\sim R^L$, 因之必須選 j 和 j_ν 使得 $l+l_\nu=L-\eta_K$. 將公式 (4.7) 代入 (4.12), 並應用附錄 1 公式 (12), (25) 和 (26), 得到

$$\Psi_{JM;ja;j_\nu a_\nu}(\mathbf{r};\sigma_e\,\beta_e;\sigma_\nu\,\beta_\nu) = \frac{4\pi}{\sqrt{2}}\, i^{l_\nu}\, p_\nu^{l_\nu}\, F_l^{\beta_e a} \sum_{L,S} \begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ l_\nu & \frac{1}{2} & j_\nu \\ L & S & J \end{Bmatrix} C^{LM-\Sigma,S\Sigma}_{JM}\, C^{\frac{1}{2},\sigma_e;\frac{1}{2},\sigma_\nu}_{S,\Sigma} \times$$

$$\times\, \mathfrak{Y}_L^{M-\Sigma}(\mathbf{r})\, r^{l+l_\nu-L} \qquad |l-l_\nu| \leqslant L \leqslant l+l_\nu \qquad S=0 \text{ 或 } 1. \quad (4.11)$$

由於選擇 j 和 j_ν 使得 $l+l_\nu=L-\eta_K$, 所以求上式右端對 L 之和時, 只取 L 等於 $L-\eta_K$ 一項. 將這結果代入公式 (4.10), 得到

$$(\psi^{*}_{jma}\, KC\, \varphi^{*}_{j_\nu-\mu_\nu a}) = \sum_{J=|j-j_\nu|}^{j+j_\nu} C^{j,m;j_\nu,-\mu_\nu}_{J,M} \frac{4\pi}{\sqrt{2}} (-i)^{l_\nu}\, p_\nu^{l_\nu} \sum_{\beta\beta_\nu\sigma\sigma_\nu} \sum_S \begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & j \\ l_\nu & \frac{1}{2} & j_\nu \\ L-\eta_k & S & J \end{Bmatrix} \times$$

$$\times\, (KC)^{\sigma_e\sigma_\nu}_{\beta_e\beta_\nu}\, F_l^{\beta_e a *}\, C^{L,M-\Sigma;S,\Sigma}_{J,M}\, C^{\frac{1}{2},\sigma_e;\frac{1}{2},\sigma_\nu}_{S,\Sigma}\, \mathfrak{Y}_L^{M-\Sigma}(\mathbf{r}). \quad (4.12)$$

在上式中當 K 爲標量時, 由第二節得知

$$KC = a_k \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

當 $\mathbf{K}$ 爲矢量時, 公式 (2.2) 中之$(\mathbf{K}\varrho\cdot\mathbf{K})$ 可以寫成

$$(\mathbf{K}\,Q\cdot\mathbf{K})=\left(-\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}}\,Q\right)\left(-\frac{K_x-iK_y}{\sqrt{2}}\right)+K_z\,Q\,K_z+\left(\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}}\,Q\right)\left(\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\sum_{k}\,(K_\lambda\,Q\,K_\lambda^\dagger),$$

上式 λ 分別等於 $-1,\ 0,\ +1$（見公式 (2.3)）．所以當 $\mathbf{K}$ 爲矢量時，公式 (4.12) 中之 KC 成爲（見公式 (2.6)）：

$$K_\lambda^\dagger\,C=a_k\times\omega_\lambda. \tag{4.14}$$

將公式 (4.12)，(4.13) (4.14) 和公式 (2.7) 代入公式 (4.6)，經過較長的計算後，得到第 L 次禁戒躍遷 β–中微子角關聯爲

$$C_L=\left(\frac{pW}{2\pi^2}F(z,W)\right)^{-1}4\pi\,\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{\mu\mu_\nu}\Bigg|\sum_{K}\sum_{jma}\sum_{j_\nu a_\nu}\sum_{\beta\beta_\nu}g_K\sum_{J}C_{J,M}^{j,m;j_\nu,-\mu_\nu}\times$$
$$\times\left(a^{\frac{1}{2}+\mu}\sqrt{j+\frac{1}{2}}\,e^{i\delta_{l,j-\frac{1}{2}a}}\right)\left(a_\nu^{\frac{1}{2}-\mu_\nu}\sqrt{j_\nu+\frac{1}{2}}\right)\times\mathfrak{D}^{(j)}\,(R_e)_{m\mu}\,(-i)^{l_\nu}\,p_\nu^{l_\nu}\,F_l^{\beta_e a^*}\times$$
$$\begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & j\\ l_\nu & \frac{1}{2} & j_\nu\\ L-\eta_K & \xi_K & J\end{Bmatrix}(-1)^{\eta_K}(\beta_e)^{\zeta_K}\,\delta_{\beta_e,\,(2\eta_K-1)\beta_\nu}\int V_{I_h}^{M_h^*}\,(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{M\dagger}\;Q\,U_{I_i}^{M_i}\,d\mathbf{r}\Bigg|^2. \tag{4.15}$$

在上式中我們應注意到 $S=\xi_K$，而當 K 爲標量時，

$$(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{M\dagger}=K\,\mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M*}(\mathbf{r})\qquad J=L-\eta_K$$

當 $\mathbf{K}$ 爲矢量時，（見附錄 1，公式 (14) 和 (15)）

$$(\mathbf{r}^{L-\eta_K},\mathbf{K})_J^{M\dagger}=\sum_{\lambda}C_{JM}^{L-\eta_K,M-\lambda,S\lambda}\,\mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M-\lambda^*}(\mathbf{r})\,K_\lambda^\dagger=$$
$$=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{L-\eta_K+1}{2(L-\eta_K)+3}}\,\mathfrak{Y}_{L-\eta_K+1}^{M\dagger}\,(\mathbf{K},\underbrace{\mathbf{r},\cdots,\mathbf{r}}_{L-\eta_K\text{ 個 }\mathbf{r}}) & J=L-\eta_K+1\\[2ex] i\sqrt{\dfrac{L-\eta_K}{L-\eta_K+1}}\,\mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M\dagger}\,([\mathbf{K}\times\mathbf{r}],\underbrace{\mathbf{r},\cdots,\mathbf{r}}_{L-\eta_K-1\text{ 個 }\mathbf{r}}) & J=L-\eta_K\end{cases} \tag{4.16}$$

其中 $\mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M^*}(\mathbf{r})$ 代表共軛複立體諧函數；$\mathfrak{Y}_{L-\eta_K+1}^{M\dagger}(\mathbf{K},\mathbf{r},\cdots,\mathbf{r})$ 等代表厄密共軛複立體諧函數．

現在我們應將公式 (4.15) 中之絕對值平方計算出來．首先應用 $l=j+\frac{1}{2}a\beta_e$；$l_\nu=j_\nu+\frac{1}{2}a_\nu\beta_\nu$ 這兩個關係，將對 j 和 j_ν 之和換成對 l 和 l_ν 之和；並應用 $l+l_\nu=L-\eta_K$ 這關係，將對 l_ν 之和換成對 l 之和．其次應用羣論的理論[1)]矩陣元

1) 見 Wigner, E., Gruppentheorie und ihre Auwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren (Friedr. Vieweg & Sohn 1931)，第 264 頁，第 XXI 章，公式 (19).

$$\int V_{l_h}^{M_h *}(\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\; Q\; U_{l_i}^{M_i}\, d\mathbf{r} = C_{l_i, M_i}^{l_h, M_h; J, M}\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J, \tag{4.17}$$

式中 $\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J$ 稱之爲約化矩陣元,它和 M_i, M_h, M 無關. 將式(4.17)代入式(4.15),經過很繁複的計算之後,最後得到相互作用混合時,L 次禁戒躍遷的 β–中微子角關聯的公式爲:

$$C_L = \sum_{K, K'} C_L(K, K'), \tag{4.18}$$

而

$$\begin{aligned} C_L(K, K') = {} & (-1)^{\eta_K+\eta_{K'}}(4\pi)^2 g_K\, g_{K'} \sum_J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K'\rangle^J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{J*} \sum_{l\bar{l}} \sum_m \sum_{\mu\mu_\nu} \mathfrak{D}^{(l+\frac12)}(R_e)_{m\mu} \\ & \mathfrak{D}^{(\bar{l}+\frac12)}(R_e)_{m\mu} \sqrt{\frac{(l+1)(\bar{l}+1)}{2J+1}}\, i^{(\eta_K-\eta_{K'})+(l-\bar{l})} \Big\{ p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu-2}\,(M'-(-1)^{\mu-\mu_\nu+\zeta_K} M'')\, X\bar{X} + \\ & + p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu}\,(L'-(-1)^{\mu-\mu_\nu+\zeta_K} L'')\, Y\bar{Y} + p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu-1}\, i\,((-1)^{\mu-\mu_\nu} N''-(-1)^{\zeta_K}\, i\, N')\, X\bar{Y} + \\ & + p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu-1}\,(-i)((-1)^{\mu-\mu_\nu} N''^{\dagger}+(-1)^{\zeta_{K'}}\, i\, N'^{\dagger})\, Y\bar{X}; \end{aligned} \tag{4.19}$$

式中

$$X=\sum_{a=\pm1} C_{J\, m-\mu_\nu}^{l+\frac12, m; l_\nu-1+\frac12 a, -\mu_\nu} \sqrt{l_\nu+\tfrac12 a-\tfrac12} \begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ l_\nu-1 & \frac12 & l_\nu-1+\frac12 a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} (\delta_{\eta_K,1}(-a)^{\frac12-\mu_\nu}+\delta_{\eta_K,0}\, a^{\frac12-\mu}) \tag{4.20}$$

$$Y=\sum_{a=\pm1} C_{J\, m-\mu_\nu}^{l+\frac12, m; l_\nu+\frac12 a, -\nu_\nu} \sqrt{l_\nu+\tfrac12 a+\tfrac12} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ l_\nu & \frac12 & l_\nu+\frac12 a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} (-\delta_{\eta_K,1}\, a^{\frac12\mu_\nu}-\delta_{\eta_K,0}(-a)^{\frac12-\mu_\nu})$$

其中 $l_\nu = L-\eta_K-l$, $\bar{l}_\nu = L-\eta_{K'}-\bar{l}$; $\bar{X}$ 和 $\bar{Y}$ 是將 X 及 Y 中的 l, l_ν, ξ_K, η_K, 換成 $\bar{l}$, $\bar{l}_\nu$, $\xi_{K'}$, $\eta_{K'}$; 至於其中

$$\left.\begin{aligned} M' &= M_{l\bar{l}}'^{+}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - M_{l\bar{l}}'^{-}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, & M'' &= M_{l\bar{l}}''^{+}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} + M_{l\bar{l}}''^{-}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, \\ L' &= L_{l\bar{l}}'^{+}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - L_{l\bar{l}}'^{-}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, & L'' &= L_{l\bar{l}}''^{+}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} + L_{l\bar{l}}''^{-}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, \\ N' &= N_{l\bar{l}}'^{+}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - N_{l\bar{l}}'^{-}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, & N'' &= N_{l\bar{l}}''^{+}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - N_{l\bar{l}}''^{-}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, \\ N'^{\dagger} &= N_{l\bar{l}}'^{+*}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - N_{l\bar{l}}'^{-*}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}, & N''^{\dagger} &= N_{l\bar{l}}''^{+*}\,\delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - N_{l\bar{l}}''^{-*}\,\delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}. \end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

在上式中 $L=0, 1, 2, \cdots$ 就分別是容許躍遷,第一次禁戒躍遷,第二次禁戒躍遷等;l 和 $\bar{l}$ 之值是從零起,但它們的最大值須使 $2L-(\eta_K+\eta_{K'})-(l+\bar{l})$, $2L-(\eta_K+\eta_{K'})-(l+\bar{l})-1$ 或 $2L-(\eta_K+\eta_{K'})-(l+\bar{l})-2$ 是正數. 我們還應注意到 $L-l-\eta_K+\frac{1}{2}a$,

$L-l-\eta_K-1+\frac{1}{2}a$; $L-\bar{l}-\eta_{K'}+\frac{1}{2}a$, $L-\bar{l}-\eta_{K'}-1+\frac{1}{2}a$ $(a=\pm 1)$ 也必須是正數．此外上式所含之約化矩陣元和通常在 β-衰變中所用之矩陣元的關係見附錄 3 的式 (34), L, M, N 等函數的定義見附錄 2 的式 (28), 但在實際計算中，應用式 (4.19) 還很不方便，我們還可以進一步把它簡化，應用附錄 1 的式 (6), (8), (11) 可知

$$\mathfrak{D}^{(l+\frac{1}{2})}(R_e)_{m\mu}\,\mathfrak{D}^{(\bar{l}+\frac{1}{2})}(R_e)^*_{m\mu}=(-1)^{m-\mu}\sum_{k=|l-\bar{l}|}^{l+\bar{l}}C_{k,0}^{l+\frac{1}{2},m;\bar{l}+\frac{1}{2},-m}\,\mathfrak{D}^{(k)}(R_e)_{00}\,C_{k,0}^{l+\frac{1}{2},\mu;\bar{l}+\frac{1}{2},-\mu}=$$

$$=(-1)^{m-\mu}\sum_{k=|l-\bar{l}|}^{l+\bar{l}}C_{k,0}^{l+\frac{1}{2},m;\bar{l}+\frac{1}{2},-m}\,C_{k,0}^{l+\frac{1}{2},\mu;\bar{l}+\frac{1}{2},-\mu}\,P_k(\cos\theta) \tag{4.22}$$

式中 $P_k(\cos\theta)$ 是勒琴德多項式；前面已經講過，$R_e=\left\{\varphi-\frac{\pi}{2},\ -\theta,\ 0\right\}$，$\theta$ 就是 β-粒子和中微子之間的夾角．將 (4.22) 代入 (4.19)，並應用附錄 1 的式 (17)，將克萊必西-戈登係數化成拉卡係數 W，式 (4.19) 就變成

$$C_L(K,K')=(4\pi)^2 g_K g_{K'}\sum_{l} i^{\eta_K-\eta_{K'}}\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^{l}\langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^{l*}\sum_{l\bar{l}}\sum_{k}(-1)^{l}\sqrt{(l+1)(\bar{l}+1)}\ \times$$

$$\times\ C_{k\,0}^{l+\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\bar{l}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\,p_k(\cos\theta)\left\{i^{l-\bar{l}}\,p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu-2}\sum_{a,a'=\pm 1}\sqrt{(l_\nu+\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2})(\bar{l}_\nu+\tfrac{1}{2}a'-\tfrac{1}{2})}\ \times\right.$$

$$\times\ C_{k,0}^{l_\nu-1+\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2};\bar{l}_\nu-1+\frac{1}{2}a',\frac{1}{2}}\,W(l_\nu-1+\tfrac{1}{2}a\ \ J\ \ k\ \ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ /\ l+\tfrac{1}{2}\ \ \bar{l}_\nu-1+\tfrac{1}{2}a')\ \times$$

$$\times\begin{Bmatrix} l+1 & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2}\\ l_\nu-1 & \frac{1}{2} & l_\nu-1+\frac{1}{2}a\\ L-\eta_K & \xi_K & J\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{l}+1 & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2}\\ l_\nu-1 & \frac{1}{2} & \bar{l}_\nu-1+\frac{1}{2}a'\\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & J\end{Bmatrix}(-1)^{l_\nu+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}\,2aa'\Big[(1+(-1)^{l+\bar{l}-k})\ \times$$

$$\times\ M'-(1-(-1)^{l+\bar{l}-k})(-1)^{\zeta_K}M''\Big]+i^{l-\bar{l}}\,p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu}\sum_{a,a'=\pm 1}\sqrt{(l_\nu+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2})(\bar{l}_\nu+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2})}\ \times$$

$$\times\ C_{k,0}^{l_\nu+\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2};\bar{l}_\nu+\frac{1}{2}a',\frac{1}{2}}\,W(l_\nu+\tfrac{1}{2}a\ \ J\ \ k\ \ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ /\ l+\tfrac{1}{2}\ \ \bar{l}_\nu+\tfrac{1}{2}a')\ \times$$

$$\times\begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2}\\ l_\nu & \frac{1}{2} & l_\nu+\frac{1}{2}a\\ L-\eta_K & \xi_K & J\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{l} & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2}\\ \bar{l}_\nu & \frac{1}{2} & \bar{l}_\nu+\frac{1}{2}a'\\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & J\end{Bmatrix}(-1)^{l_\nu+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}}\,2aa'\Big[(1+(-1)^{l+\bar{l}-k})\ \times$$

$$\times\ L'-(1-(-1)^{l+\bar{l}-k})(-1)^{\zeta_K}L''\Big]+i^{l-\bar{l}+1}\,p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu-1}\sum_{a,a'=\pm 1}\sqrt{(l_\nu+\tfrac{1}{2}a-\tfrac{1}{2})(\bar{l}_\nu+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2})}\ \times$$

$$\times\ C_{k,0}^{l_\nu-1+\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2};\bar{l}_\nu+\frac{1}{2}a',\frac{1}{2}}\,W(l_\nu-1+\tfrac{1}{2}a\ \ J\ \ k\ \ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ /\ l+\tfrac{1}{2}\ \ \bar{l}_\nu+\tfrac{1}{2}a')\ \times$$

$$\times\begin{Bmatrix} l+1 & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2}\\ l_\nu-1 & \frac{1}{2} & l_\nu-1+\frac{1}{2}a\\ L-\eta_K & \xi_K & J\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{l} & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2}\\ \bar{l}_\nu & \frac{1}{2} & \bar{l}_\nu+\frac{1}{2}a'\\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & J\end{Bmatrix}(-1)^{l_\nu+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}\,2aa'\Big[(1-(-1)^{l+\bar{l}-k})\ \times$$

$$\times N''-(1+(-1)^{l+\bar{l}-k})(-1)^{\zeta_K} i N'\Big] + i^{l-\bar{l}-1} p_\nu^{l_\nu+\bar{l}_\nu-1} \sum_{a,a'=\pm 1} \sqrt{(l_\nu+\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2})(\bar{l}_\nu+\tfrac{1}{2}a'+\tfrac{1}{2})} \times$$

$$\times C_{k,0}^{l_\nu+\frac{1}{2}a,-\frac{1}{2};\,\bar{l}_\nu-1+\frac{1}{2}a',\frac{1}{2}} W(l_\nu+\tfrac{1}{2}a \;\; J \;\; k \;\; \bar{l}+\tfrac{1}{2} \;/\; l+\tfrac{1}{2} \;\; \bar{l}_\nu-1+\tfrac{1}{2}a') \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2} \\ l_\nu & \frac{1}{2} & l_\nu+\frac{1}{2}a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{l}+1 & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2} \\ \bar{l}_\nu-1 & \frac{1}{2} & \bar{l}_\nu-1+\frac{1}{2}a' \\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} (-1)^{l_\nu+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}}\, 2aa' \Big[(1-(-1)^{l+\bar{l}-k}) \times$$

$$\times N''^{\dagger} + (1+(-1)^{l+\bar{l}-k}(-1)^{\zeta_{K'}} i N'^{\dagger}\Big\} \tag{4.23}$$

從這個公式中,我們令 $L=1$ 或 2 就可得到第一次、第二次禁戒躍遷的 β-中微子角關聯的公式. 但在具體計算時,還須要利用附錄 3 的式 (31). 我們已求出第一和第二次禁戒躍遷的公式,其中第一次禁戒躍遷的公式和葛魯林、密克斯與莫瑞塔所得的公式是一樣的[12]. 同時,從上述公式還可以看出 k 的最大值. 由克萊必西-戈登係數可知 k 的最大值必滿足 $k=l+\bar{l}+1$ 及 $k=2L-(l+\bar{l})+1$, 所以要使得 k 之值爲最大, $l+\bar{l}$ 必須等於 L. 因之 k 之最大值是 $L+1$. 換句話說,對於第 L 次禁戒躍遷而言, β-中微子角關聯中所含之 $\cos\theta$ 的最大冪數爲 $L+1$. 這結果和別人的結果也是相同的.

五. β-能譜因子

求出 β-中微子角關聯之後,再求 β-能譜因子是很容易的. 只需將式 (4.19) 代入式 (4.1), 並對 ω_e 和 ω_ν 積分,立即可得. 由於羣論理論中的公式(見附錄 1, 公式 (7))

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{D}^{(l+\frac{1}{2})}(R_e)_{m\mu}\, \mathfrak{D}^{(\bar{l}+\frac{1}{2})}(R_e)^*_{m\mu}\, d\omega_e = \delta_{l\bar{l}}\, \frac{1}{2(l+1)} \tag{5.1}$$

和克萊必西-戈登係數的正交性質

$$\sum_{mm'} C_{L,M}^{l,m;\,l',m'}\, C_{L'M'}^{l,m;\,l',m'} = \delta_{LL'}\,\delta_{MM'},$$

式 (4.19) 經過對 ω_e 積分之後,可以簡化很多. 最後得到

$$P(W)\,dW = \frac{1}{2\pi^3} F(z,W) \sum_{L=0}^{\infty} C_L P_\nu^2\, PW\, dW, \tag{5.2}$$

$$C_L = \sum_{KK'} C_L(K,K'), \tag{5.3}$$

$$C_L(K,K') = (4\pi)^2 g_K\, g_{K'} \sum_J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K'\rangle^{J*} \times$$

$$\times \sum_l \Bigg\{ p_\nu^{2(L-l-1-\eta_K)} \sum_{a=\pm1} \begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K-1 & \frac12 & L-l-\eta_K-1+\frac12 a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K-1 & \frac12 & L-l-\eta_K-1+\frac12 a \\ L-\eta_K & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} (M_l^{+} \delta_{\zeta_K,\zeta'_K} - M_l'^{-} \delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}) +$$

$$+ p_\nu^{2(L-l-\eta_K)} \sum_{a=\pm1} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K & \frac12 & L-l-\eta_K+\frac12 a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K & \frac12 & L-l-\eta_K+\frac12 a \\ L-\eta_K & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} (L_l'^{+} \delta_{\zeta_K,\zeta'_K} - L_l'^{-} \delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}) +$$

$$+ p_\nu^{2(L-l-\eta_K)-1} (-1)^{1+\zeta_K} \Bigg[\begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K-1 & \frac12 & L-l-\eta_K-\frac12 \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & L+\frac12 \\ L-l-\eta_K & \frac12 & L-l-\eta_K-\frac12 \\ L-\eta_K & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix}$$

$$+ (-1)^{\zeta_K+\zeta_{K'}} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K & \frac12 & L-l-\eta_K-\frac12 \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K-1 & \frac12 & L-l-\eta_K-\frac12 \\ L-\eta_K & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} \Bigg] \times$$

$$\times (N_l'^{+} \delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - N_l'^{-} \delta_{\zeta_K,|\zeta_K,-1|}) \Bigg\} \quad \text{當} \quad \eta_K = \eta_{K'}, \qquad (5.4)$$

$$C_L(K,K') = (4\pi)^2 g_K g_{K'} \sum_J i \langle r^{L-\eta_{K'}}, K\rangle^J \langle r^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{J*} \times$$

$$\times \sum_l \Bigg\{ (1-2\eta_K)\, p_\nu^{2(L-l)-1} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_K & \frac12 & L-l-\frac12 \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-\eta_{K'} & \frac12 & L-l-\frac12 \\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} \times$$

$$(L_l'^{+} \delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - L_l'^{-} \delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}) + (-1)^{1+\zeta_K} p_\nu^{2(L-l-1)}$$

$$\Bigg[\sum_{a=\pm1} \begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-1 & \frac12 & L-l-1+\frac12 a \\ L & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & L+\frac12 \\ L-l-1 & \frac12 & L-l-1+\frac12 a \\ L-1 & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} \delta_{\eta_K,0}\, \delta_{\eta_{K'},1} -$$

$$- (-1)^{\zeta_K+\zeta_{K'}} \sum_{a=\pm1} \begin{Bmatrix} l & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-1 & \frac12 & L-l-1+\frac12 a \\ L-1 & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l+1 & \frac12 & l+\frac12 \\ L-l-1 & \frac12 & L-l-1+\frac12 a \\ L & \xi_{K'} & J \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \delta_{\eta_K,1}\, \delta_{\eta_{K'},0} \Bigg] (N_l'^{+} \delta_{\zeta_K,\zeta_{K'}} - N_l'^{-} \delta_{\zeta_K,|\zeta_{K'}-1|}) \Bigg\} \quad \text{當} \quad \eta_K \neq \eta_{K'}. \qquad (5.5)$$

在這裏我們按照平常一般文獻中所引用的符號，仍用 C_L 代表能譜因子（在上節中我們用 C_L 代表角關聯）．公式（5.4）和（5.5）中的 M, L, N 等函數和公式（4.19）中的 M, L, N 等函數的關係如下：

$$M_l'^{\pm} = M_{ll}'^{\pm}; \qquad L_l'^{\pm} = L_{ll}'^{\pm}; \qquad N_l'^{\pm} = N_{ll}'^{\pm}, \tag{5.6}$$

而 $M_l'^{+}$, $L_l'^{+}$, $N_l'^{+}$ 就是葛魯林所用之 M_l, L_l, N_l; $M_l'^{-}$, $L_l'^{-}$, $N_l'^{-}$ 也就是伯塞所用之 Q_l, P_l, R_l. 應用表 2 找出 g_K 和 G 的關係,並應用附錄 3 的公式（34），找出約化矩陣元和通常在 β- 衰變中所用之矩陣元的關係,以及應用附錄 1 的公式（25），(27) 找出係數 $\left\{\begin{matrix} l & \frac{1}{2} & j \\ l_\nu & \frac{1}{2} & j_\nu \\ L & S & J \end{matrix}\right\}$ 之值,我們立刻可知公式（5.4）和（5.5）是與葛魯林和伯塞的結果是完全相同的．

但是公式（5.4）和（5.5）與巴納爾基和撒哈[8]的結果略有不同．首先由於公式（2.7）與巴納爾基和撒哈的公式（29）不同．所以在他們的能譜因子公式中出現有 $(-1)^{\xi_K+\xi_{K'}}$ 這一因子，這就使得他們的公式和葛魯林和伯塞的公式有時相差符號，和我們所求得的公式（5.4）和（5.5）自然有時也同樣相差符號．此外，在巴納爾基和撒哈的表 4 中,當 **K** 爲矢量時，$g_{\mathbf{K}}$ 和 G 的關係中出現有 $\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$,並且在他們在約化矩陣元和通常在 β- 衰變中所用之矩陣元的關係中也引入 $\frac{4\pi}{3}$ 這一因子．從我們的計算中看來,這都是不必要的．

六. $\beta-\gamma$ 角 關 聯

由哈密頓[18] 以及法爾柯夫和宇倫貝克[5] 的結果可知 $\beta-\gamma$ 角關聯的公式爲

$$W(\theta) = \sum_{M_h} \left\{ \sum_{M_f} \left[S_\gamma \left| (V_{I_f}^{M_f} | H_1(0) | V_{I_h}^{M_h}) \right|^2 \right] \sum_{M_i} \left[S_\beta \left| (V_{I_h}^{M_h} | H_2(\theta) | U_{I_i}^{M_i}) \right|^2 \right] \right\}. \tag{6.1}$$

上式表示原子核首先由始態 $U_{I_i}^{M_i}$ 放出 β- 粒子．變到態 $V_{I_h}^{M_h}$，然後再放出 γ- 射線變到末態 $V_{I_f}^{M_h}$；S_γ 表示取 γ- 射線的極化方向的平均值，S_β 表示取電子自旋方向的平均值，並將中微子的運動方向和自旋方向也平均起來，此外並將實驗室系的 z-軸取成 γ- 射線的運動方向．令

$$\left.\begin{aligned} P_{M_f M_h}(0) &= S_\gamma \left| (V_{I_f}^{M_f} | H_1(0) | V_{I_h}^{M_h}) \right|^2 \\ \text{和} \quad P_{M_h M_i}(\theta) &= S_\beta \left| (V_{I_h}^{M_h} | H_2(\theta) | U_{I_i}^{M_i}) \right|^2. \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

那麽 β-γ 角關聯就變成

$$W(\theta)=\sum_{M_f M_h M_i} P_{M_f M_h}(0)\, P_{M_h M_i}(\theta)\,. \tag{6.3}$$

林和法爾柯夫[15] 已求出當電 2^L 極和磁 2^{L-1} 極輻射混合時 γ-射線角分佈的公式．我們知道，對於 γ-射線來講，或者是純粹的電多極輻射，或者是純粹的磁多極輻射；有時電多極輻射可能和磁多極輻射混合．但是可能出現的情形也只是電 2^L 極和磁 2^{L-1} 極輻射混合．所以關於 γ-射線角分佈方面我們就應用林和法爾柯夫的結果．他們的結果是

$$P_{M_f M_h}(\theta)=(C^{I_f, M_f; L, M'}_{I_h, M_h})^2\,|E_L|^2\,F^{M'}_L(\theta)+(C^{I_f, M_f; L-1, M'}_{I_h, M_h})^2\,|M_{L-1}|^2\,F^{M'}_{L-1}(\theta)+$$
$$+(C^{I_f, M_f; L, M'}_{I_h, M_h})\,(C^{I_f, M_f; L-1, M'}_{I_h, M_h})\,(E_L M^*_{L-1}+E^*_L M_{L-1})\,F^{M'}_{L, L-1}(\theta) \tag{6.4}$$

式中 E_L 和 M_{L-1} 分别是電 2^L 極和磁 2^{L-1} 極輻射的約化矩陣元，F 是 γ-射線的角分佈，它們分别是

$$\left.\begin{aligned}
F^{M'}_L(\theta)&=\frac{4\pi}{L(L+1)}\Big[2M'^2|Y^{M'}_L|^2+(L+M')(L-M'+1)|Y^{M'-1}_L|^2+\\
&\quad+(L+M'+1)(L-M')|Y^{M'+1}_L|^2\Big],\\
F^{M'}_{L, L-1}(\theta)&=-4\pi\left(\frac{2L+1}{2L-1}\,\frac{(L-M')(L+M')}{L^2(L^2-1)}\right)^{\frac{1}{2}}\Big[2M'|Y^{M'}_{L-1}|^2+\\
&\quad+(L-M'-1)|Y^{M'+1}_{L-1}|^2-(L+M'-1)|Y^{M'-1}_{L-1}|^2\Big].
\end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

我們現在主要地是計算電子的角分佈．首先應將中微子的運動方向平均起來，同時也應將電子和中微子的自旋方向平均起來．所以在公式 (3.6) 中應首先對立體角 ω_ν 積分，在積分時，仍應用公式

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{D}^{(j_\nu)}(R_\nu)_{m_\nu\,-\mu_\nu}\,\mathfrak{D}^{(\bar{j}_\nu)}(R_\nu)^*_{\bar{m}_\nu\,-\mu_\nu}\,d\omega_\nu=\delta_{j_\nu \bar{j}_\nu}\,\delta_{m_\nu \bar{m}_\nu}\,\frac{1}{(2j_\nu+1)}\,.$$

積分之後，仍應用不可約張量算符可以表示成立體諧函數這一性質來計算原子核方位固定時，它在 L 次禁戒躍遷時所放出電子的角分佈．在計算過程中我們仍是考慮到相互作用混合時的情形，並採取和計算 β-中微子角關聯完全相類似的步驟．即先將電子和中微子的總角動量 j 和 j_ν 合成總角動量 J，並且使 $l+l_\nu=L-\eta_K$．此外應用公式 (4.17) 引入約化矩陣元．同樣也應用公式 (4.22) 將轉動羣的兩個表象之乘積化爲勒琴德多項式 $P_k(\cos\theta)$，並應用附錄 1 的公式 (17)，將克萊必西-戈登係數簡

化爲拉卡係數. 最後得到具有固定方位的原子核,當相互作用混合時,第 L 次禁戒躍遷的電子的角分佈的公式是:

$$P_{M_h M_i}(\theta)=\sum_{J\bar{J}} C_{I_i, M_i}^{I_h, M_h; J, M} C_{I_i, M_i}^{I_h, M_h; \bar{J}, M} \sum_{KK'} F_{J\bar{J}}^{M}(L; K, K'); \tag{6.6}$$

式中 $F_{J\bar{J}}^{M}(L;K,K')$ 就是電子的角分佈:

$$\begin{aligned}
F_{J\bar{J}}^{M}(L;K,K') &= (-1)^{\eta_K+\eta_{K'}}(4\pi)^2 g_K g_{K'} i^{\eta_K-\eta_{K'}} \tfrac{1}{2}\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^{J} \langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}*} \times \\
&\times \sum_{l\bar{l}} \sum_{k} (-1)^{\bar{J}-M+l+1} \sqrt{(l+1)(\bar{l}+1)}\, C_{k,0}^{J,M;\bar{J},-M} C_{k,0}^{l+\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\bar{l}+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} P_k(\cos\theta) \times \\
&\times \Big\{ i^{(l-\bar{l})} p_v^{l_v+\bar{l}_v-2} \sum_{a,a'=\pm 1} W(\bar{J}\ \ l_v-1+\tfrac{1}{2}a\ \ k\ \ l+\tfrac{1}{2}\ /\ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ \ J) \times \\
&\times \begin{Bmatrix} l+1 & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2} \\ l_v-1 & \frac{1}{2} & l_v-1+\frac{1}{2}a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{l}+1 & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2} \\ \bar{l}_v-1 & \frac{1}{2} & \bar{l}_v-1+\frac{1}{2}a \\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & \bar{J} \end{Bmatrix} [(1+(-1)^{l+\bar{l}-k})\,\Delta_1 M' + \\
&+ (-1)^{\zeta_K}(1-(-1)^{l+\bar{l}-k})\,\Delta_2 M'']\, \delta_{l+\eta_K-\frac{1}{2}a,\, \bar{l}+\eta_{K'}-\frac{1}{2}a'} \\
&+ i^{(l-\bar{l})} p_v^{l_v+\bar{l}_v} \sum_{a,a'=\pm 1} W(\bar{J}\ \ l_v+\tfrac{1}{2}a\ \ k\ \ l+\tfrac{1}{2}\ /\ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ \ J) \times \\
&\times \begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2} \\ l_v & \frac{1}{2} & l_v+\frac{1}{2}a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{l} & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2} \\ \bar{l}_v & \frac{1}{2} & \bar{l}_v+\frac{1}{2}a' \\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & \bar{J} \end{Bmatrix} [(1+(-1)^{l+\bar{l}-k})\,\Delta_1 L' + \\
&+ (-1)^{\zeta_K}(1-(-1)^{l+\bar{l}-k}\,\Delta_2 L'')]\, \delta_{l+\eta_K-\frac{1}{2}a,\, \bar{l}+\eta_{K'}-\frac{1}{2}a'} \\
&+ i^{(l-\bar{l})+1} p_v^{l_v+\bar{l}_v-1} \sum_{a,a'=\pm 1} W(\bar{J}\ \ l_v-1+\tfrac{1}{2}a\ \ k\ \ l+\tfrac{1}{2}\ /\ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ \ J) \times \\
&\times \begin{Bmatrix} l+1 & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2} \\ l_v-1 & \frac{1}{2} & l_v-1+\frac{1}{2}a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{l} & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2} \\ \bar{l}_v & \frac{1}{2} & \bar{l}_v+\frac{1}{2}a' \\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & \bar{J} \end{Bmatrix} [(1-(-1)^{l+\bar{l}-k})\,\Delta_1 N'' + \\
&+ i(-1)^{\zeta_K}(1+(-1)^{l+\bar{l}-k})\,\Delta_2 N']\, \delta_{l+\eta_K+1-\frac{1}{2}a,\, \bar{l}+\eta_{K'}-\frac{1}{2}a'} \\
&+ i^{(l-\bar{l})+1} p_v^{l_v+\bar{l}_v-1} \sum_{a,a'=\pm 1} W(\bar{J}\ \ l_v+\tfrac{1}{2}a\ \ k\ \ l+\tfrac{1}{2}\ /\ \bar{l}+\tfrac{1}{2}\ \ J) \times \\
&\times \begin{Bmatrix} l & \frac{1}{2} & l+\frac{1}{2} \\ l_v & \frac{1}{2} & l_v+\frac{1}{2}a \\ L-\eta_K & \xi_K & J \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{l}+1 & \frac{1}{2} & \bar{l}+\frac{1}{2} \\ \bar{l}_v-1 & \frac{1}{2} & \bar{l}_v-1+\frac{1}{2}a' \\ L-\eta_{K'} & \xi_{K'} & \bar{J} \end{Bmatrix} [(1-(-1)^{l+\bar{l}-k})\,\Delta_1 N''^{+} - \\
&- i(-1)^{\zeta_{K'}}\,\Delta_2 N'^{+}]\, \delta_{l+\eta_K-\frac{1}{2}a,\, \bar{l}+\eta_{K'}+1-\frac{1}{2}a'} \Big\},
\end{aligned} \tag{6.7}$$

式中 $\Delta_1 = \delta_{\eta_K, \eta_{K'}}(1+aa') + \delta_{\eta_K, |\eta_K-1|}(1-aa')$；

$$\Delta_2 = \delta_{\eta_K, \eta_{K'}}(1-aa') + \delta_{\eta_K, |\eta_{K'}-1|}(1+aa').$$

從這公式我們就很容易求出雅瑪塔和莫瑞塔[13]的結果，只要分別令 $L=1$ 或 2 就成了[1)]. 但在具體計算中，仍需用附錄 3 公式 (31). 此外我們必須注意到在電子的角分佈公式中，J 和 $\bar{J}$ 可能不相等，而在 β-中微子角關聯的公式中就沒有這種情況. 因此當 J 和 $\bar{J}$ 不相等時，就不能把 $\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}*}$ 化成通常在 β-衰變中所用之矩陣元，而只能將 $|\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J|$ 和 $|\langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}}|$ 化成通常在 β-衰變中所用之矩陣元的絕對值. 但由附錄 3 公式 (31) 可知：當 $\eta_K=\eta_{K'}$ 時，$\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J$ 和 $\langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}}$ 的相角 θ_{J,η_K} 和 $\theta_{\bar{J},\eta_{K'}}$ 可能相差 $0, \pi, 2\pi, \cdots$；當 $\eta_K \neq \eta_{K'}$ 時，$\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J$ 和 $\langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}}$ 的相角 θ_{J,η_K} 和 $\theta_{\bar{J},\eta_{K'}}$ 可能相差 $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \cdots$. 所以在 $\eta_K=\eta_{K'}$ 時，

$$\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}*} + \text{共軛複函數} =$$

$$= |\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J|\,|\langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}} K'\rangle^{\bar{J}}|\, 2\cos(\theta_{J,\eta_K} - \theta_{\bar{J},\eta_{K'}});$$

而在 $\eta_K \neq \eta_{K'}$ 時，

$$i\,(\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J \langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}*} - \text{共軛複函數}) =$$

$$= |\langle \mathbf{r}^{L-\eta_K}, K\rangle^J|\,|\langle \mathbf{r}^{L-\eta_{K'}}, K'\rangle^{\bar{J}}|\, 2\sin(\theta_{\bar{J},\eta_{K'}} - \theta_{J,\eta_K}).$$

上兩式中正負號不能確定，因此當 $J \neq \bar{J}$ 時，要把它們化爲通常 β-衰變中所用之矩陣元，正負號不能確定. 而在 β-中微子的公式中，$J=\bar{J}$，所以這個問題不會發生.

將公式 (6.7) 和 (6.4) 代入公式 (6.3)，並令公式 (6.4) 中的 θ 等於零，我們就得到 β-γ 角關聯的公式.

附　　錄

數　學　公　式

1. 球諧函數；立體球諧函數；轉動羣的表象；克萊必西-戈登係數；拉卡係數.

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^m \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{1/2} \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\right]^{1/2} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi},$$

(l 是正整數，m 可爲正負數)；　(1)

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{\sin^m\theta}{2^l\, l!}\left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m}(\cos^2\theta-1)^l\ (m>0),$$

$$P_l^{-m}(\cos\theta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos\theta)\ (m>0);\quad (2)$$

$$Y_l^m(\theta,\varphi) = (-1)^m\, Y_l^{-m}(\theta,\varphi)^*;\quad (3)$$

1) 我們這裏所用的 L, M, N 等函數和雅瑪塔、莫瑞塔所用的 L, M, N 等函數有些區別，見錄附 2.

$$\mathfrak{Y}_l^m(\mathbf{r}) = r^l Y_l^m(\theta, \varphi); \tag{4}$$

$$\mathfrak{D}^{(j)}(\{\alpha, \beta, \gamma\})_{mm'} = i^{m-m'} \sum_x (-1)^x \frac{\sqrt{(j+m')!\,(j-m')!\,(j+m)!\,(j-m)!}}{(j-m-x)!\,(j+m'-x)!\,x!\,(x+m-m')!} \times$$

$$\times e^{im\alpha} \cos^{2j+m'-m-2x}\frac{\beta}{2} \sin^{2x+m-m'}\frac{\beta}{2} e^{im'\gamma}; \tag{5}$$

$$\mathfrak{D}^{(j)}(R)^*_{mm'} = (-1)^{m-m'} \mathfrak{D}^{(j)}(R)_{-m-m'} = \mathfrak{D}^{(j)}(R^{-1})_{m'm}; \tag{6}$$

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathfrak{D}^{(j)}(R)_{mn} \mathfrak{D}^{(j')}(R)_{m'n'}\, d\omega = \delta_{j,j'}\, \delta_{mm'}\, \delta_{nn'} \frac{1}{2j+1}; \tag{7}$$

$$\mathfrak{D}^{(l)}\left(\left\{\varphi - \frac{\pi}{2}, -\theta, 0\right\}\right)_{m0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_l^m(\theta, \varphi);\ \mathfrak{D}^{(l)}(\{0,0,0)_{mm'} = \delta_{mm'}; \tag{8}$$

$$\sum_{m'} \mathfrak{D}^{(j)}(R)_{mm'} \mathfrak{D}^{(j)}(S)_{m'\overline{m}} = \mathfrak{D}^{(j)}(RS)_{m\overline{m}}; \tag{9}$$

$$\mathfrak{Y}_l^m(\mathbf{r}) = \sum_{m'} \mathfrak{D}^{(l)}(R)_{mm'} \mathfrak{Y}_l^{m'}(\mathbf{r}') \quad (\text{坐標系 } x, y, z \text{ 經過轉動 } R \text{ 變成 } x', y', z'). \tag{10}$$

$$\mathfrak{D}^{(j)}(R)_{mn} \mathfrak{D}^{(j')}(R)_{m'n'} = \sum_{k=|j-j'|}^{j+j'} C^{j,m;j,m'}_{k,m+m'} \mathfrak{D}^{(k)}(R)_{m+m'\,m+n'} C^{j,n;j',n'}_{k,n+n'}; \tag{11}$$

$$\mathfrak{Y}_l^m(\mathbf{r}) \mathfrak{Y}_{l'}^{m'}(\mathbf{r}) = \sum_{k=|l-l'|}^{l+l'} \left[\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2k+1)}\right]^{1/2} r^{l+l'-k} C^{l,m;l',m'}_{k,m+m'} \mathfrak{Y}_k^{m+m'}(\mathbf{r}) C^{l,0;l',0}_{k,0}; \tag{12}$$

$$\mathfrak{Y}_l^m(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_l) = \frac{1}{l!} \sum_{i_1\cdots i_l} A_{1i_1} A_{2i_2} \cdots A_{li_l} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_l}} \mathfrak{Y}_l^m(\mathbf{r}); \tag{13}$$

$$\mathfrak{Y}_{l+1}^m(\mathbf{K}, \underbrace{\mathbf{r}, \cdots, \mathbf{r}}_{l\text{ 個 }\mathbf{r}}) = \sqrt{\frac{2l+3}{l+1}} \sum_{\lambda=-1}^{+1} C^{l,m-\lambda;1,\lambda}_{l+1,m} \mathfrak{Y}_l^{m-\lambda}(\mathbf{r}) K_\lambda \times$$

$$\times \left(K_\pm = \mp \frac{K_x \pm i K_y}{\sqrt{2}},\ K_0 = K_z\right); \tag{14}$$

$$\mathfrak{Y}_l^m([\mathbf{K}\times\mathbf{r}], \underbrace{\mathbf{r}, \cdots, \mathbf{r}}_{l-1\text{ 個 }\mathbf{r}}) = i\sqrt{\frac{l+1}{l}} \sum_{\lambda=-1}^{+1} C^{l,m-\lambda;1,\lambda}_{l,m} \mathfrak{Y}_l^{m-\lambda}(\mathbf{r}) K_\lambda; \tag{15}$$

式中 $C^{l,m;l',m'}_{L,M}$ $(M = m + m')$ 是克萊必西-戈登係數,而

$$C^{l,m;l'm'}_{L,m+m'} = \sqrt{\frac{(L+l-l')!\,(L-l+l')!\,(l+l'-L)!\,(L+m+m')!\,(L-m-m')!}{(L+l+l'+1)!\,(l-m)!\,(l+m)!\,(l'-m')!\,(l'+m')!}} \times$$

$$\times \sum_x \frac{(-1)^{x+l'+m'}\sqrt{2l+1}\,(L+l'+m-x)!\,(l-m+x)!}{(L-l+l'-x)!\,(L+m+m'-x)!\,x!\,(x+l-l'-m-m')!}, \tag{16}$$

$$\sum_{\alpha\beta\delta} C^{a,\alpha;b,\beta}_{c,\gamma} C^{d,\delta;b,\beta}_{e,\varepsilon} C^{a,\alpha;f,\phi}_{d,\delta} = \sqrt{2c+1}\sqrt{2d+1}\, W(cbfd/ae)\, C^{c,\gamma;f,\phi}_{e,\varepsilon}; \tag{17}$$

式中 $W(a\,b\,c\,d\,/\,e\,f)$ 是拉卡係數.

$$W(abcd/0f)=(-1)^{b+c-f}[(2b+1)(2c+1)]^{-1/2}\delta_{ab}\delta_{cd}; \tag{18}$$

$$\sum_e (2e+1)W(aefd/bc)W(aegd/bc)=\frac{\delta_{f,g}}{2f+1}; \tag{19}$$

$$\sum_e (-1)^{a+b+c+d+e+f+g}(2e+1)W(abcd/fe)W(abdc/eg)=W(acdb/fg). \tag{20}$$

$$\left.\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{c}{W\left(l_1 J_1 l_2 J_2\Big/\frac{1}{2}L\right):} \\
\multicolumn{2}{c}{l_1=J_1+\frac{1}{2}} \\
l_2=J_2+\frac{1}{2} & (-1)^{l_1+l_2-L}\left[\frac{(J_1+J_2+L+2)(J_1+J_2-L+1)}{(2J_1+1)(2J_1+2)(2J_2+1)(2J_2+2)}\right]^{1/2}, \\
l_2=J_2-\frac{1}{2} & (-1)^{l_1+l_2-L}\left[\frac{(L+J_1-J_2+1)(L-J_1+J_2)}{(2J_1+1)(2J_1+2)(2J_2)(2J_2+1)}\right]^{1/2}; \\
\multicolumn{2}{c}{l_1=J_1-\frac{1}{2}} \\
l_2=J_2+\frac{1}{2} & (-1)^{l_1+l_2-L}\left[\frac{(L-J_1+J_2+1)(L+J_1-J_2)}{(2J_1)(2J_1+1)(2J_2+1)(2J_2+2)}\right]^{1/2}, \\
l_2=J_2-\frac{1}{2} & (-1)^{l_1+l_2-L-1}\left[\frac{(J_1+J_2+L+1)(J_1+J_2-L)}{(2J_1)(2J_1+1)(2J_2)(2J_2+1)}\right]^{1/2}.
\end{array}\right\} \tag{21}$$

$$\left.\begin{array}{l}
W(I\ I-l\ \ kl/lI)=\left\{\frac{(2l)!(2l)!(2I+k+1)!(2I-k)!}{(2I+1)!(2I+1)!(2l+k+1)!(2l-k)!}\right\}^{1/2}, \\
W(I\ I+l\ \ kl/lI)=(-1)^k\left\{\frac{(2I)!(2I)!(2l)!(2l)!}{(2I-k)!(2l-k)!(2l+k+1)!(2I+k+1)!}\right\}^{1/2}, \\
W(I\ I-l+1\ \ kl/lI)=2[2l(I+1)-k(k+1)(I-l+1)]\times \\
\qquad\times\left\{\frac{(2l-1)!(2l-1)!(2I-k)!(2I+k+1)!}{(2I+2)!(2I+2)!(2l+k+1)!(2l-k)!}\right\}^{1/2}, \\
W(I\ I+l-1\ \ kl/lI)=2(-1)^k[2lI-k(k+1)(I+l)]\times \\
\qquad\times\left\{\frac{(2l-1)!(2l-1)!(2I-1)!(2I-1)!}{(2I+k+1)!(2l+k+1)!(2l-k)!(2I-k)!}\right\}^{1/2}, \\
W(I\ I-l\ \ kl/l+1\ I)= \\
\qquad=\left\{2k(k+1)(I-l)\frac{(2l)!(2l+1)!(2I-k)!(2I+k+1)!}{(2l-k+1)!(2l+k+2)!(2I+1)!(2I+2)!}\right\}^{1/2}, \\
W(I\ I+l\ \ kl/l+1\ I)=(-1)^{k-1}\times \\
\quad\times\left\{2k(k+1)(I+l+1)\frac{(2l)!(2l+1)!(2I)!(2I-1)!}{(2I-k)!(2I+k+1)!(2l-k+1)!(2l+k+2)!}\right\}^{1/2};
\end{array}\right\} \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&W(IJ0F/FI)=\left\{\frac{1}{(2F+1)(2I+1)}\right\}^{1/2},\\
&W(IJ02F/FI)=\left\{\frac{(2F-2)!\,(2I-2)!}{(2F+3)!\,(2I+3)!}\right\}^{1/2}\times\\
&\quad\times 2[3C(C+1)-4I(I+1)F(F+1)]\ C=J(J+1)-I(I+1)-F(F+1).
\end{aligned}\right\}\qquad(23)$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & s_1 & j_1\\ l_2 & s_2 & j_2\\ L & S & J\end{bmatrix}=(2L+1)^{1/2}(2S+1)^{1/2}(2j_1+1)^{1/2}(2j_2+1)^{1/2}\times$$

$$\times\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda}(2\lambda+1)\,W(l_2j_2Ss_1|s_2\lambda)\,W(l_1l_2JS|L\lambda)\,W(l_1s_2Jj_2|j_1\lambda);\qquad(24)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{Bmatrix} l_1 & \frac12 & j_1\\ l_2 & \frac12 & j_2\\ L & S & J\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} l_1 & \frac12 & j_1\\ l_2 & \frac12 & j_2\\ L & S & J\end{bmatrix}\left[\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}\right]^{1/2}C^{l_1,0;l_2,0}_{L,0}\,\frac{1}{(2l_2+1)!!}=\\
&\qquad=\frac{1}{4\pi}\begin{bmatrix} l_1 & \frac12 & j_1\\ l_2 & \frac12 & j_2\\ L & S & J\end{bmatrix}N(L)\left[\frac{2^{L-2l_1}(2l_1+1)!}{(2L-2l_1+1)!\,(l!)^2}\right]^{1/2};\\
&N(L)=\left[\frac{4\pi L!}{(2L+1)!!}\right]^{1/2},\quad (2L+1)!!=\frac{(2L+1)!}{2^L L!}.
\end{aligned}\right\}\qquad(25)$$

$$C^{j_1,m_1;j_2,m_2}_{J,M}\,C^{l_1,n_1;s_1,\sigma_1}_{j_1,m_1}\,C^{l_2,n_2;s_2,\sigma_2}_{j_2,m_2}=$$

$$=\sum_{LS}\begin{bmatrix} l_1 & s_1 & j_1\\ l_2 & s_2 & j_2\\ L & S & J\end{bmatrix}C^{L,N;S,\Sigma}_{J,M}\,C^{l_1,n_1;l_2,n_2}_{L,N}\,C^{s_1,\sigma_1;s_2,\sigma_2}_{S,\Sigma};\qquad(26)$$

$$\begin{bmatrix} l_1 & s_1 & j_1\\ l_2 & s_2 & j_2\\ L & S & J\end{bmatrix}:$$

$S=0,\quad J=L=l_1+l_2:$

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} l_1 & \frac12 & l_1+\frac12\\ l_2 & \frac12 & l_2+\frac12\\ L & 0 & L\end{bmatrix}\left[\frac{L+1}{(2l_1+1)(2l_2+1)}\right]^{1/2},\quad \begin{bmatrix} l_1 & \frac12 & l_1-\frac12\\ l_2 & \frac12 & l_2+\frac12\\ L & 0 & L\end{bmatrix}=-\left[\frac{l_1}{2l_1+1}\right]^{1/2},\\
&\begin{bmatrix} l_1 & \frac12 & l_1+\frac12\\ l_2 & \frac12 & l_2-\frac12\\ L & 0 & L\end{bmatrix}=\left[\frac{l_2}{2l_2+1}\right]^{1/2},\qquad \begin{bmatrix} l_1 & \frac12 & l_1-\frac12\\ l_2 & \frac12 & l_2-\frac12\\ L & 0 & L\end{bmatrix}=0;
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

$$= 1, \quad J = L + 1 = l_1 + l_2 + 1: \begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1+\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2+\frac{1}{2} \\ L & 1 & L+1 \end{bmatrix} = 1, \quad \text{其餘等於零；}$$

$S = 1, \quad J = L = l_1 + l_2:$

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1+\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2+\frac{1}{2} \\ L & 1 & L \end{bmatrix} = \frac{l_1 - l_2}{\sqrt{L(2l_1+1)(2l_2+1)}}, \quad \begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1-\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2+\frac{1}{2} \\ L & 1 & L \end{bmatrix} = \left[\frac{l_1(L+1)}{L(2L_1+1)}\right]^{1/2}, \\ &\begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1+\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2-\frac{1}{2} \\ L & 1 & L \end{bmatrix} = \left[\frac{l_2(L+1)}{L(2l_2+1)}\right]^{1/2}, \quad \begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1-\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2-\frac{1}{2} \\ L & 1 & L \end{bmatrix} = 0; \end{aligned}\right.$$

$S = 1, \quad J = L - 1 = l_1 + l_2 - 1:$

$$\left\{\begin{aligned} &\begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1+\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2+\frac{1}{2} \\ L & 1 & L-1 \end{bmatrix} = -\left[\frac{1}{L(2L-1)} \frac{4l_1 l_2}{(2l_1+1)(2l_2+1)}\right]^{1/2}, \\ &\begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1-\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2+\frac{1}{2} \\ L & 1 & L-1 \end{bmatrix} = \left[\frac{2L+1}{2L(2L-1)} \frac{2l_1(2l_2-1)}{(2l_1+1)(2l_2+1)}\right]^{1/2}, \\ &\begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1+\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2-\frac{1}{2} \\ L & 1 & L-1 \end{bmatrix} = -\left[\frac{2L+1}{2L(2L-1)} \frac{2l_2(2l_2-1)}{(2l_1+1)(2l_2+1)}\right]^{1/2}, \\ &\begin{bmatrix} l_1 & \frac{1}{2} & l_1-\frac{1}{2} \\ l_2 & \frac{1}{2} & l_2-\frac{1}{2} \\ L & 1 & L-1 \end{bmatrix} = \left[\frac{2L+1}{2L-1} \frac{4l_1 l_2}{(2l_1+1)(2l_2+1)}\right]^{1/2}. \end{aligned}\right. \tag{27}$$

2. L, M, N 等函數的定義（R 是原子核的半徑）：

$$\left.\begin{aligned} L'^{\pm}_{l\bar{l}} &= \left(\frac{pW}{2\pi^2} F(z, W)\right)^{-1} \frac{g_l g_{\bar{l}} e^{i(\delta_{-(l+1)} - \delta_{-(\bar{l}+1)})} \pm f_{-l-2} f_{-\bar{l}-2} e^{i(\delta_{l+1} - \delta_{\bar{l}+1})}}{4\pi R^{l+\bar{l}}}, \\ L''^{\pm}_{l\bar{l}} &= \left(\frac{pW}{2\pi^2} F(z, W)\right)^{-1} \frac{-i g_l f_{-\bar{l}-2} e^{i(\delta_{-(l+1)} - \delta_{\bar{l}+1})} \pm i f_{-l-2} g_{\bar{l}} e^{i(\delta_{l+1} - \delta_{-(\bar{l}+1)})}}{4\pi R^{l+\bar{l}}}, \\ M'^{\pm}_{l\bar{l}} &= \left(\frac{pW}{2\pi^2} F(z, W)\right)^{-1} \frac{g_{-l-2} g_{-\bar{l}-2} e^{i(\delta_{l+1} - \delta_{\bar{l}+1})} \pm f_l f_{\bar{l}} e^{i(\delta_{-(l+1)} - \delta_{-(\bar{l}+1)})}}{4\pi R^{l+\bar{l}+2}}, \\ M''^{\pm}_{l\bar{l}} &= \left(\frac{pW}{2\pi^2} F(z, W)\right)^{-1} \frac{-i g_{-l-2} f_{\bar{l}} e^{i(\delta_{l+1} - \delta_{-(\bar{l}+1)})} \pm i f_l g_{-\bar{l}-2} e^{i(\delta_{-(l+1)} - \delta_{(\bar{l}+1)})}}{4\pi R^{l+\bar{l}+2}}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

$$
\left.\begin{aligned}
N_{l\bar{l}}'^{\pm} &= \left(\frac{pW}{2\pi^2} F(z, W)\right)^{-1} \frac{f_l\, g_{\bar{l}}\, e^{i(\delta_{-(l+1)} - \delta_{-(\bar{l}+1)})} \mp g_{-l-2}\, f_{-\bar{l}-2}\, e^{i(\delta_{l+1} - \delta_{\bar{l}+1})}}{4\pi R^{l+\bar{l}+2}}, \\
N_{l\bar{l}}''^{\pm} &= \left(\frac{pW}{2\pi^2} F(z, W)\right)^{-1} \frac{g_{-l-2}\, g_{\bar{l}}\, e^{i(\delta_{l+1} - \delta_{-(\bar{l}+1)})} \pm f_l\, f_{-\bar{l}-2}\, e^{i(\delta_{-(l+1)} - \delta_{\bar{l}+1})}}{4\pi R^{l+\bar{l}+1}}.
\end{aligned}\right|
$$

當 $\alpha z \ll 1$ 時, L, M, N 等函數可展開成爲如下的近似公式(以下的公式統稱爲公式 (29)):

$$L_{l\bar{l}}'^{+} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right);$$

$$L_{l\bar{l}}'^{-} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{W};$$

$$L_{l\bar{l}}''^{+} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{p}{W};$$

$$L_{l\bar{l}}''^{-} \cong 0;$$

$$M_{l\bar{l}}'^{+} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\cdot(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{(l+1)(\bar{l}+1)} \times$$
$$\times \left[\left(\frac{\alpha z}{2R}\right)^2 + \left(\frac{l+1}{2l+3} + \frac{\bar{l}+1}{2\bar{l}+3}\right) \frac{p^2}{W} \left(\frac{\alpha z}{2R}\right) + \frac{(l+1)(\bar{l}+1)}{(2l+3)(2\bar{l}+3)} p^2\right];$$

$$M_{l\bar{l}}'^{-} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{(l+1)(\bar{l}+1)} \times$$
$$\times \left[-\left(\frac{\alpha z}{2R}\right)^2 \frac{1}{W} + \frac{(l+1)(\bar{l}+1)}{(2l+3)(2\bar{l}+3)} \frac{p^2}{W}\right];$$

$$M_{l\bar{l}}''^{+} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{(l+1)(\bar{l}+1)} \times$$
$$\times \left[\frac{p}{W}\left(\frac{\alpha z}{2R}\right)^2 + \left(\frac{l+1}{2l+3} + \frac{\bar{l}+1}{2\bar{l}+3}\right) p \left(\frac{\alpha z}{2R}\right) + \frac{(l+1)(\bar{l}+1)}{(2l+3)(2\bar{l}+3)} \frac{p^3}{W}\right];$$

$$M_{l\bar{l}}''^{-} \cong e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{(l+1)(\bar{l}+1)} \times$$
$$\times \left[\frac{1}{2p}\left(\frac{\alpha z}{R}\right)^2 + \left(\frac{\bar{l}+1}{2\bar{l}+3} - \frac{l+1}{2l+3}\right) \frac{\alpha z}{2R} \cdot \frac{p}{W}\right];$$

$$N_{l\bar{l}}'^{+} \cong -e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{l+1} \left(\frac{\alpha z}{2R} + \frac{l+1}{2l+3} \frac{p^2}{W}\right);$$

$$N_{l\bar{l}}'^{-} \cong -e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{1}{l+1} \left(\frac{\alpha z}{2R}\right) \frac{1}{W};$$

$$N_{l\bar{l}}''^{+} \cong -e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!}\right) \frac{i}{l+1} \left(\frac{\alpha z}{2R} \frac{p}{W} + \frac{l+1}{2l+3} p\right);$$

$$N_{ll}''^{-} \cong -i\, e^{-i\frac{\pi}{2}(l-\bar{l})} \left(\frac{l!\,\bar{l}!\,(2p)^{l+\bar{l}}}{(2l+1)!\,(2\bar{l}+1)!} \right) \frac{1}{2l+3} \frac{p}{W}.$$

3. 約化矩陣元之間的關係；約化矩陣元和通常在 β- 衰變中所用之矩陣元之間的關係：要求約化矩陣元之間的關係，可利用時間反射算符 σ_y[19]：

$$\int \left(V_{I_h}^{M_h *} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, Q\, U_{I_i}^{M_i} \right) d\mathbf{r} = \int \left(V_{I_h}^{M_h *}\, \sigma_y\, \sigma_y^{-1} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, \sigma_y\, Q\, \sigma_y^{-1}\, U_{I_i}^{M_i} \right) d\mathbf{r}$$

$$\sigma_y^{-1} U_{I_i}^{M_i} = (-1)^{M_i} e^{-i\varphi} U_{I_i}^{-M_i *}, \qquad \sigma_y^{-1} V_{I_h}^{M_h} = (-1)^{M_h} e^{-i\psi} V_{I_h}^{-M_h *};$$

$$\int \left(V_{I_h}^{M_h *} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, Q\, U_{I_i}^{M_i} \right) d\mathbf{r} =$$

$$= (-1)^{M_i+M_h} e^{i(\psi-\varphi)} \int \left(V_{I_h}^{-M_h}\, \sigma_y^{-1} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, \sigma_y\, Q\, U_{I_i}^{-M_i *} \right) d\mathbf{r}.$$

當 **K** 爲矢量時，$K_x \sigma_y = -\sigma_y K_x$，$K_y \sigma_y = -\sigma_y K_y$，$K_z \sigma_y = -\sigma_y K_z$，且

$$\sigma_y^{-1} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, \mathbf{K})_J^{M\dagger}\, \sigma_y = \sigma_y^{-1} \left[\sum_\lambda C_{J,M}^{L-\eta_K, M-\lambda;\, 1,\lambda}\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M-\lambda *}\, K_\lambda^\dagger \right] \sigma_y =$$

$$= -\Bigg[C_{J,M}^{L-\eta_K, M-1;\, 1,1} (-1)^{M-1} \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)+1} \left(-\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}} \right) + C_{J,M}^{L-\eta_K, M;\, 1,0} (-1)^M \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)} K_z +$$

$$+ C_{J,M}^{L-\eta_K, M+1;\, 1,-1} (-1)^{M+1} \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)-1} \left(\frac{K_x-iK_y}{\sqrt{2}} \right) \Bigg] =$$

$$= (-1)^{M+1+L-\eta_K+1-J} \Bigg[C_{J,(-M)}^{L-\eta_K, (-M)+1;\, 1,-1}\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)+1 *} \left(\frac{K_x+iK_y}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$+ C_{J,(-M)}^{L-\eta_K, (-M);\, 1,0}\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)*} K_z + C_{J,(-M)}^{L-\eta_K, (-M)-1;\, 1,1}\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)-1 *} \left(-\frac{K_x-iK_y}{\sqrt{2}} \right) \Bigg]^* =$$

$$= (-1)^{L-\eta_K-J+M} \left[\sum_\lambda C_{J,(-M)}^{L-\eta_K, (-M)-\lambda;\, 1,\lambda}\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{(-M)-\lambda *}\, K_\lambda^\dagger \right]^* =$$

$$= (-1)^{L-\eta_K-J+M} \left[(\mathbf{r}^{L-\eta_K}, \mathbf{K})_J^{-M\dagger} \right]^*.$$

當 K 爲標量時，$K\sigma_y = \sigma_y K$，且

$$\sigma_y^{-1} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, \sigma_y = K\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M\dagger} = (-)^M K\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{-M} = (-1)^{L-\eta_K-J+M} \left[K\, \mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{-M*} \right]^* =$$

$$= (-1)^{L-\eta_K-J+M} \left[(\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{-M\dagger} \right]^*.$$

所以無論 K 是標量或是矢量，

$$\sigma_y^{-1} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, \sigma_y = (-1)^{L-\eta_K-J+M} \left[(\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{-M\dagger} \right]^*.$$

因之

$$\int \left(V_{I_h}^{M_h *} (\mathbf{r}^{L-\eta_K}, K)_J^{M\dagger}\, Q\, U_{I_i}^{M_i} \right) d\mathbf{r} =$$

$$=(-1)^{L-\eta_K-J}(-1)^{M_i+M_h+M}e^{i(\psi-\varphi)}\int\left(V_{I_h}^{-M_h}\left[(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{-M\dagger}\right]^*Q\,U_{I_i}^{-M_i*}\right)d\mathbf{r}=$$

$$=(-1)^{L-\eta_K-J}e^{i(\psi-\varphi)}\int\left(V_{I_h}^{-M_h*}(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{-M\dagger}\;Q\,U_{I_i}^{-M_i}\right)^*d\mathbf{r}\,.$$

應用本文中公式 (4.17)，得到

$$C_{I_i,M_i}^{I_hM_h;J,M}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J=(-1)^{L-\eta_K-J}e^{i(\psi-\varphi)}\,C_{I_i,-M_i}^{I_h,-M_h;J,-M}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^{J*}=$$

$$=(-1)^{L-\eta_K-J+I_h+J-I_i}e^{i(\psi-\varphi)}\,C_{I_i,M_i}^{I_h,M_h;J,M}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^{J*},$$

亦卽

$$\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J=(-1)^{L-\eta_K+I_h-I_i}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^{J*}.\tag{30}$$

所以

$$\frac{\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J}{\langle\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^J}=\frac{(-1)^{L-\eta_K+I_h-I_i}e^{i(\psi-\varphi)}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^{J*}}{(-1)^{L-\eta_{K'}+I_h-I_i}e^{i(\psi-\varphi)}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^{J*}}=$$

$$=(-1)^{\eta_{K'}-\eta_K}\frac{\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^{J*}}{\langle\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^{J*}}.\tag{31}$$

最後求約化矩陣元與通常 β- 衰變中所用之矩陣元的關係：首先由本文中公式 (4.17) 得知

$$\int\left(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{M\dagger}\;Q\,U_{I_i}^{M_i}\right)d\mathbf{r}=C_{I_i,M_i}^{I_h,M_h;J,M}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J.$$

因之

$$\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{M\bar{M}}\int\left(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{M\dagger}\;Q\,U_{I_i}^{M_i}\right)d\mathbf{r}\left[\int\left(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K')_J^{\bar{M}\dagger}\;Q\,U_{I_i}^{M_i}\right)d\mathbf{r}\right]^*=$$

$$=\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{M\bar{M}}C_{I_i,M_i}^{I_h,M_h;J,M}C_{I_i,M_i}^{I_h,M_h;J,\bar{M}}\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J\langle\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^{J*}.$$

應用附錄 1 中公式 (20) 和 (21)，很容易看出上式之右端求出和之後，就等於 $\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J\langle\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^{J*}$，因之

$$\langle\mathbf{r}^{L-\eta_K},K\rangle^J\langle\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K'\rangle^{J*}=$$

$$=\frac{1}{2I_i+1}\sum_{M_iM_h}\sum_{M\bar{M}}\int\left(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r}^{L-\eta_K},K)_J^{M\dagger}\,Q\,U_{I_i}^{M_i}\right)d\mathbf{r}\left[\int\left(V_{I_h}^{M_h*}(\mathbf{r}^{L-\eta_{K'}},K')_J^{\bar{M}\dagger}\,Q\,U_{I_i}^{M_i}\right)d\mathbf{r}\right]^*.\tag{32}$$

其次令 $T_{i_1i_2\cdots i_{L-\eta_K}}$ 是直角坐標中不可約張量算符，則

$$[N(L-\eta_K)]^2\sum_{M=-(L-\eta_K)}^{L-\eta_K}\mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M\dagger}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_{L-\eta_K})\,\mathfrak{Y}_{L-\eta_K}^{M}(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_{L-\eta_K})=$$

$$=\sum_{i_1i_2\cdots i_{L-\eta}}T_{i_1i_2\cdots i_{L-\eta_K}}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\cdots,\mathbf{A}_{L-\eta_K})\,T_{i_1i_2\cdots i_{L-\eta_K}}(\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\cdots,\mathbf{B}_{L-\eta_K}).\tag{33}$$

式中 $N(L-\eta_K)$ 之定義見附錄 1，公式 (32). 應用公式 (39)，(40) 以及附錄 1 中公式 (14) 和 (15)，可得約化矩陣元與通常 β-衰變中所用之矩陣元的關係（以下統稱為公式 (34)）：

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{K}\rangle^0 \quad \langle \mathbf{r}, \mathbf{K}\rangle^{0*} = \frac{1}{[N(1)]^2}\frac{1}{3}\left|\frac{Q_0(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})}{0!}\right|^2,$$

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{K}\rangle^0 \quad \langle \mathbf{r}^0, \mathbf{K}\rangle^{0*} = -\frac{1}{[N(0)]^2}\left[\frac{Q_0(\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\,Q_0(K)^*}{(0!)^2}\right],$$

$$\langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}\rangle^{L+1} \langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}\rangle^{L+1*} = \frac{1}{[N(L)]^2}\left|\frac{Q_{L+1}(\mathbf{K}, \mathbf{r})}{(L+1)!}\right|^2,$$

$$\langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}\rangle^L \quad \langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}\rangle^{L*} = \frac{L}{L+1}\frac{1}{[N(L)]^2}\left|\frac{Q_L([\mathbf{K}\times\mathbf{r}], \mathbf{r})}{L!}\right|^2,$$

$$\langle \mathbf{r}^L, K\rangle^L \quad \langle \mathbf{r}^L, K\rangle^{L*} = \frac{1}{[N(L)]^2}\left|\frac{Q_L(K\mathbf{r}, \mathbf{r})}{L!}\right|^2,$$

$$\langle \mathbf{r}^L, K\rangle \quad \langle \mathbf{r}^L, K'\rangle^{L*} = \frac{1}{[N(L)]^2}\left[\frac{Q_L(K\mathbf{r}, \mathbf{r})\,Q_L^*(K'\mathbf{r}, \mathbf{r})}{(L!)^2}\right],$$

$$\langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}\rangle^L \quad \langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}'\rangle^{L*} = \frac{L}{L+1}\frac{1}{[N(L)]^2}\left[\frac{Q_L([\mathbf{K}\times\mathbf{r}], \mathbf{r})\,Q_L^*([\mathbf{K}'\times\mathbf{r}], \mathbf{r})}{(L!)^2}\right],$$

$$\langle \mathbf{r}^L, K\rangle^L \quad \langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}'\rangle^{L*} = -i\sqrt{\frac{L}{L+1}}\frac{1}{[N(L)]^2}\left[\frac{Q_L(K\mathbf{r}, \mathbf{r})\,Q_L^*([\mathbf{K}'\times\mathbf{r}], \mathbf{r})}{(L!)^2}\right],$$

$$\langle \mathbf{r}^L, K\rangle^L \langle \mathbf{r}^{L-1}, \mathbf{K}'\rangle^{L*} = \sqrt{\frac{L}{2L+1}}\frac{1}{[N(L)]^2}\left[\frac{Q_L(K\mathbf{r}, \mathbf{r})\,Q_L^*(\mathbf{K}', \mathbf{r})}{(L!)^2}\right],$$

$$\langle \mathbf{r}^L, \mathbf{K}\rangle^L \langle \mathbf{r}^{L-1}, \mathbf{K}'\rangle^{*} = \sqrt{\frac{L}{L+1}}\frac{1}{[N(L)\,N(L-1)]}\left[\frac{i\,Q_L([\mathbf{K}\times\mathbf{r}], \mathbf{r})\,Q_L^*(\mathbf{K}', \mathbf{r})}{(L!)^2}\right].$$

參 考 文 獻

[1] Mahmond, H. M. and Konopinski, E. J., *Phys. Rev.*, **88** (1952), 1266; Konopinski, E. J. and Langer, L. M., *Ann Revs. Nuclear Sci.*, **2** (1953), 261; Yamada, M., *Progr. Theort. Phys.*, **10** (1953), 252; Plassamann, E. A. and Langer, L. M., *Phys. Rev.*, **96** (1954), 1593.

[2] Ruby, S. L. and Rustad, B. M., *Phys. Rev.*, **89** (1953), 880; Allen, J. S. and Jentschke, W. K. *Phys. Rev.*, **89** (1953), 902.

[3] Alford, W. P. and Hamilton, D. R., *Phys. Rev.*, **95** (1954), 1351.

[4] Зельдович, Г. Б., *Изв. АН СССР, Серия физич.*, **18** (1954), 2, 243.

[5] Falkoff, D. L. and Uhlenbeck, G. E., *Phys. Rev.*, **79** (1950), 334.

[6] Richmond, R. and Rose, H., *Phil. Mag.*, **43** (1952), 367; Rose, H., *Phil. Mag.*, **43** (1952), 1146.

[7] Fujita, J., Morita, M. and Yamada, M., *Progr. Theort. Phys.*, **11** (1954), 219.

[8] Langer, L. M., Lazar, N. H. and Moffat, R. J. D., *Phys. Rev.*, **91** (1953), 338; Morita, M. and Yamada, M. *Progr. Theort. Phys.*, **10** (1953), 641.

[9] Konopinski, E. J. and Uhlenbeck, G. E., *Phys. Rev.*, **60** (1941), 308; Greuling, E., *Phys. Rev.*, **61** (1942), 568; Pursey, D. L., *Phil. Mag.*, **42** (1951), 1193.

[10] Spiers, J. A. and Blinstoyle, R. J., *Proc. Phys. Soc.*, **A 65** (1952), 801.

[11] Benerjee, M. K. and Saha, A. K., *Proc. Roy. Soc.*, **A 224** (1954), 472.

[12] Greuling, E. and Meeks, M. L., *Phys. Rev.*, **82** (1951), 531; Morita, M., *Progr. Theort. Phys.*, **9** (1953), 345.

[13] Yamada, M. and Morita, M., *Progr. Theort. Phys.*, **8** (1952), 431; Morita, M., *Progr. Theort. Phys.*, **10** (1953), 363.

[14] Хуцишвили, Г. Р., *ЖЭТФ*, **25**, (1953), 763; **28**, (1955), 370.
[15] Ling, Jr. D. S. and Falkoff, D. L., *Phys. Rev.*, **76** (1949), 1639.
[16] Rose, M. E., *Phys. Rev.*, **51** (1937), 484.
[17] Bethe, H. A. and Bacher, R. F., *Rev. Mod. Phys.*, **8** (1936), § 40, 190.
[18] Hamilton, D. R., *Phys. Rev.*, **58** (1940), 122.
[19] Longmire, C. L. and Messiah, A. M. L., *Phys. Rev.*, **83**, (1951), 464; Blatt, J. M. and Weisskopf, V. F., Theoretical Nuclear Physics, 1952, 525—528. (並見 Блатт, Дж. и Вайскопф, В., Теоретическая Ядерная Физика, ИЛ, 1954, 412—414).

УГЛОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ β-НЕЙТРИНО, УГЛОВАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ β-γ И ФОРМА β-СПЕКТОРОВ

Дэнь Цзя-сянь и Хэ Цзо-сю
(Институт физики АН Китая)

Резюме

В этой статье мы получили формулу β-распада, формулу β-γ угловой корреляции при запрещённом переходе любой степени, пользуясь свойством оператора неприводимых тензоров, которое может выражаться в телесной шаровой функции и правилом аргебры Вигнер-Рака, а также и некоторыми свойствами представления группы вращения. Мы учитывали влияние колоновского поля атомных ядер на испущенные ими β-частицы и учитывали смешение взаимодействия пяти видов.

Во втором параграфе данной статьи, прежде всего, мы написали 16 4×4 матриц Дирака, заключенные в пяти взаимодействиях обычно примечённых в теории β-распада, в форму прямого произведения 2×2 матриций с помощью свойства преобразования матриц выражали эти матрицы пяти разных взаимодействий в одной формуле. В этом параграфе, мы и дали формулы разложений волновых функций электронов и нейтрино. В третьем параграфе, с помощью теории возмущений, зависящего от времени, мы подсчитали вероятность β-распада, происходящего под влиянием колоновского поля атомных ядер. Это доказали, что хотя волновая функция заключает расходящие волны и сходящие волны, но вероятность перехода вызывается лишь расходящими волнами. В четвертом, пользуясь представлениями группы вращения, а также свойство оператора неприводимых тензоров, которое может выражаться в телесной шаровой функции, мы получили формулу, β-нейтрино угловой корреляции смешения пяти взаимодействий при запрещённом переходе любой степени. В пятом мы проинтерировали выше данную формулу β-нейтрино угловой корреляции по телесному углу электронов и нейтрино после того, мы получили одинаковую формулу формы β-спектров как получили Грулин и Пурсэ. В шестом параграфе, пользуясь формулами γ-луча электрического 2^L-польного излучения и магнитного 2^{L-1}-польного излучения, полученными другими, мы и получили общий формулы β-γ угловой корреляции β-распада. В приложении дали нужные математические формулы.